

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Томский политехнический университет»

П.А. Стрижак, Д.О. Глушков

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА
С ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ
И ХИМИЧЕСКИМ РЕАГИРОВАНИЕМ
В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
методическим семинаром
кафедры автоматизации теплоэнергетических процессов
Энергетического института
Томского политехнического университета*

Scientific & Technical Translations



ИЗДАТЕЛЬСТВО
Томск – 2017

УДК 621.1:66.021.3/4:519.876(075.8)

ББК 31.3:35.113-1:22.12я73

С85

С85 Стрижак П.А., Глушков Д.О. **Математическое моделирование процессов тепломассопереноса с фазовыми превращениями и химическим реагированием в теплоэнергетике** : учебное пособие. – Томск : STT, 2017. – 152 с.

ISBN 978-5-93629-588-1

В пособии приведены основные сведения о математическом моделировании взаимосвязанных физико-химических процессов. Рассмотрены задачи тепломассопереноса с фазовыми превращениями и химическим реагированием. Приведены примеры алгоритмов и программных кодов на языке MATLAB для численного решения задач.

Предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», и аспирантов, обучающихся по специальностям 01.04.14 – Теплофизика и теоретическая теплотехника, 01.04.17 – Химическая физика, горение и взрыв, физика экстремальных состояний вещества, 05.14.14 – Тепловые электрические станции, их энергетические системы и агрегаты.

УДК 621.1:66.021.3/4:519.876(075.8)

ББК 31.3:35.113-1:22.12я73

Рецензенты:

Г.В. Кузнецов – докт. физ-мат. наук, профессор Томского политехнического университета;

С.В. Шидловский – докт. техн. наук, профессор Томского государственного университета.

ISBN 978-5-93629-588-1

© П.А. Стрижак, Д.О. Глушков, 2017

© Оформление. STTTM, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. НЕЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ	8
1.1. Способы локализации корней	10
1.2. Методы уточнения корней.....	11
1.3. Пример решения нелинейного уравнения.....	17
Глава 2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ	21
2.1. Наиболее распространенные методы численного интегрирования	23
2.2. Пример решения задачи численного интегрирования	27
Глава 3. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	29
3.1. Начальные условия. Задача Коши.....	32
3.2. Краевые условия. Краевая задача	32
3.3. Метод конечных разностей	33
3.4. Метод простой итерации	37
3.5. Пример численного решения краевой задачи	39
Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ	42
4.1. Уравнение теплопроводности	43
4.2. Краевые условия	47
4.3. Методы численного решения дифференциальных уравнений в частных производных.....	48
4.4. Пример численного решения задачи теплопроводности	50

Глава 5.	ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ	58
5.1.	Прогрев двухслойной металлической пластины при постоянных значениях температуры на границах	58
5.2.	Инертный прогрев пластины изоляционного материала с включениями металлических конструкционных элементов при усреднении значений теплофизических характеристик материала	64
5.3.	Инертный прогрев пластины изоляционного материала с включениями металлических конструкционных элементов при учете в явном виде структурной неоднородности материала	76
5.4.	Нагрев изоляционного материала потоком разогретого газа в условиях термического разложения	94
5.5.	Твердофазное зажигание композитного топлива при нагреве металлической частицей	100
5.6.	Нагрев жидкого топлива лучистым тепловым потоком в условиях испарения	113
5.7.	Газофазное зажигание слоя диспергированного угля при локальном нагреве	121
Литература		146
Summary		151

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время развитие технического прогресса непосредственным образом связано с результатами научных исследований (как теоретических, так и экспериментальных). Оба направления интеллектуальной деятельности являются достаточно самостоятельными. Однако в условиях интенсивных глобальных изменений во всех областях науки и сферах промышленного производства какие-либо прорывные открытия невозможны без тесной взаимосвязи численного моделирования и натурального эксперимента. Среди большого разнообразия моделей организации фундаментальных исследований можно выделить два наиболее типичных и в то же время диаметрально противоположных подхода к организации научно-исследовательской деятельности и получению конечного результата.

Как правило, основой интеллектуальной деятельности западного (европейского, американского) научного сообщества является эксперимент. Математическое моделирование имеет менее значимый характер и в подавляющем большинстве случаев реализуется в рамках коммерческих программных пакетов прикладного математического моделирования, когда творческая деятельность исследователя реализуется в рамках набора стандартных блоков и алгоритмов, различные комбинации которых позволяют более или менее достоверно описывать изучаемые процессы. На первый взгляд, такая концепция научной деятельности является привлекательной для постановки и проведения наглядных натуральных экспериментов, а также разработки математических моделей и проведения теоретических исследований даже при минимальном уровне знаний в теории численного моделирования физико-химических процессов. Однако подобный вектор организации исследовательской деятельности имеет явно выраженные недостатки, связанные с иррациональным использованием ресурсов. Среди основ-

ных можно отметить колоссальные экономические и временные затраты на организацию и проведение натурных экспериментов, а также относительно низкую достоверность результатов теоретических исследований, выполненных в рамках математических моделей коммерческих программных пакетов.

Другим направлением развития науки является отечественная модель фундаментальных исследований, основанная на теоретическом изучении новых явлений и процессов. Натурные же эксперименты преимущественно используются для оценки адекватности математических моделей и подтверждения результатов расчетов. Такая форма организации исследовательской деятельности позволяет в условиях относительно небольшого бюджета научного проекта достаточно оперативно получать новые результаты и на их основе совершать значимые на мировой арене открытия. Однако такой подход требует высокого уровня квалификации научных и инженерных кадров при решении конкретной задачи с помощью ЭВМ, направленной на получение новых знаний и конечного продукта, востребованного потребителем.

Одними из основных задач теплотехники (частью которой является теплоэнергетика) можно обоснованно считать задачи теплопереноса. Особенности работы теплоэнергетического оборудования является то, что процессы теплопереноса в рабочих трактах такого оборудования, как правило, сопровождаются фазовыми превращениями (например, испарением воды или конденсацией водяного пара) или химическими реакциями (например, горением угольной пыли или газов). Поэтому большинство задач математического моделирования в теплоэнергетике – это нелинейные задачи теплопроводности или конвекции в условиях интенсивных физико-химических превращений. Решение таких задач аналитическими или приближенными методами в подавляющем большинстве случаев невозможно, поэтому основными являются численные методы. Представление реального объекта в виде описания в рамках математической модели предполагает последующую реализацию вычислительного алгоритма и разработку программы для непосредственного проведения расчетов. При математическом моделировании процессов тепломассопереноса можно выделить несколько этапов:

1. Разработка физической модели.
2. Разработка математической модели.
3. Выбор метода численного решения для преобразования математического описания в доступный компьютеру формат.

4. Разработка алгоритма решения задачи в виде последовательности логических и арифметических операций.
5. Написание программы для реализации алгоритма решения задачи на языке программирования.
6. Отладка программного кода для его тестирования и исправления ошибок.
7. Выполнение расчетов в соответствии с исходными данными.
8. Оценка адекватности результатов численного моделирования путем сравнения с экспериментальными данными или проверки консервативности используемой разностной схемы.

Как правило, при решении конкретных задач на практике возникают сложности в ходе преобразования математической модели в доступный компьютеру формат, поэтому в данном учебном пособии основное внимание уделяется методам численного решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, а также методам численного интегрирования. Отличительной особенностью пособия является сочетание теоретической и практической составляющих, позволяющих сформировать минимальный объем знаний и получить основные практические навыки для самостоятельного решения научных и инженерных задач в рамках математического моделирования реальных физико-химических процессов.

Глава 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Достаточно часто в инженерной практике и научных исследованиях приходится решать задачи нахождения корней нелинейного уравнения вида $y=f(x)$. В зависимости от вида функции $f(x)$ исходное уравнение может иметь как конечное, так и бесконечное число решений.

Уравнение вида $y=f(x)$ является *нелинейным*, если между переменной x и функцией y отсутствует линейная связь.

Как правило, нелинейные уравнения $y=f(x)$ разделяют на два класса:

- 1) алгебраические;
- 2) трансцендентные.

Алгебраические уравнения содержат только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). К такому классу уравнений относятся, например, уравнение вида: $a_2x^2+a_1x+a_0=1$.

Трансцендентные уравнения содержат тригонометрические, логарифмические, показательные и т.д. функции, например, $x=e^{-x}$, $\cos x=x$, $\lg x=x-5$, $2^x=\lg x+x^5+40$.

Совокупность методов решения нелинейных уравнений состоит из прямых и итерационных методов.

Прямые методы решения позволяют находить корни уравнения в виде точных аналитических формул. Для некоторых нелинейных алгебраических (не выше четвертой степени) и трансцендентных (частные случаи тригонометрических и логарифмических) уравнений прямые методы решения известны.

В большинстве же случаев решение в явном виде нелинейного уравнения невозможно, поэтому используются методы последовательного приближения к точному решению x^* [1–4].

Итерационные методы решения заключаются в последовательном уточнении некоторого начального приближения $x^{(0)}$. В результате последовательных итераций находятся соответствующие приближенные значения корня уравнения: $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$. При реализации итерационного процесса задается точность определения искомого значения относительно точного решения x^* . Если с увеличением числа итераций значение $x^{(k)}$ приближается к x^* , т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \rightarrow x^*$, то говорят, что итерационный процесс *сходится*, в противном случае – *расходится*.

Как правило, итерационные методы являются основой численных методов решения нелинейных (алгебраических и трансцендентных) уравнений.

Дано уравнение:

$$f(x)=0, \quad (1)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором конечном или бесконечном интервале $a \leq x \leq b$. Всякое значение x^* (рис. 1.1), обращающее функцию $f(x)$ в нуль ($f(x^*)=0$), называется *корнем уравнения* (1) или нулем функции $f(x)$.

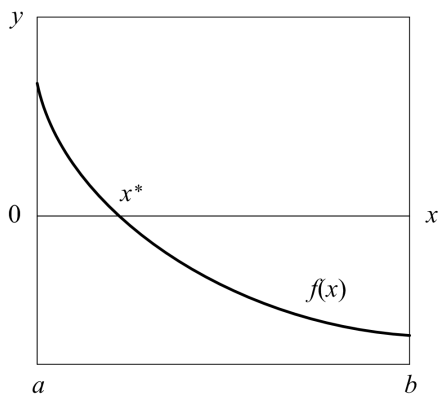


Рис. 1.1. Корень уравнения $f(x)=0$

Численное решение уравнения вида $f(x)=0$ заключается в нахождении значений x , удовлетворяющих с заданной точностью данному уравнению и состоит из двух этапов:

1. *Локализации (отделения) корней* на интервале $[a, b]$.
2. *Уточнения* в рамках одного из вычислительных алгоритмов конкретного выделенного корня с заданной точностью.

1.1. Способы локализации корней

Первый этап заключается в нахождении одного или нескольких интервалов, например $[a, b]$, $[c, d]$ и т.д., из области определения функции $y=f(x)$, внутри которых содержится только один корень решаемого уравнения. Как правило, ограничиваются рассмотрением лишь какой-нибудь части области определения, вызывающей по тем или иным соображениям интерес при нахождении искомого корня. Для реализации данного этапа используются аналитические или графические способы.

Теорема: Непрерывная и монотонная функция $f(x)$ имеет единственный нуль (корень) на интервале $[a, b]$, когда на его концах она принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b)<0$. Достаточным признаком монотонности функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ является постоянство знака производной этой функции.

1.1.1. Табличный способ отделения корней

В интервале $[a, b]$ задается сетка: $a=x_1<x_2<\dots<x_k=b$, в узлах которой вычисляются значения функции $f(x_i)$, достаточно определить только знаки функции в узловых точках. При выполнении неравенства $f(x_i)f(x_{i+1})<0$ согласно теореме в интервале $[x_i, x_{i+1}]$ находится корень уравнения.

Пример. Определить интервалы, содержащие корни уравнения:

$$f(x)=-0,05x^3+0,03x^2+0,4x-0,44 \quad (2)$$

Решение. В табл. 1.1 приведены знаки функции в узловых точках.

Таблица 1.1

Знаки функции в узловых точках

$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
+	+	-	-	-	-	-	+	-	-

Уравнение (2) имеет три корня, расположенных в интервалах $[-4, -3]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$.

1.1.2. Графический способ отделения корней

Графический способ локализации корней целесообразно применять в том случае, когда имеется возможность построения графика функции $y=f(x)$. График исходной функции дает однозначное представление о числе и расположении нулей функции, что позволяет определить промежутки, внутри которых содержится только один корень. В некоторых случаях построение графика функции $y=f(x)$ вызывает затруднение. В этом случае це-

лесообразно преобразовать уравнение (1) к эквивалентному виду $f_1(x)=f_2(x)$ и построить графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут соответствовать значениям корней исходного уравнения.

Пример. Определить интервал, содержащий корень уравнения $x \lg x = 1$

Решение. Преобразуем уравнение к виду $\lg x = 1/x$ и построим графики функций $f_1(x)=\lg x$, $f_2(x)=1/x$ (рис. 1.2).

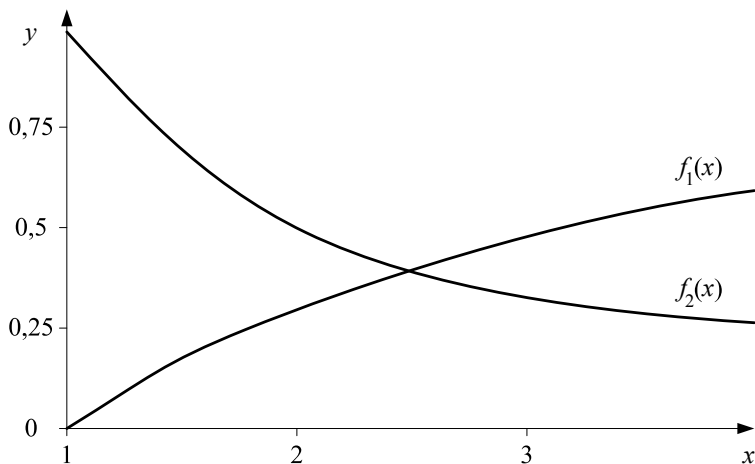


Рис. 1.2. Графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$

Согласно рисунку 1.2, искомый корень уравнения находится в интервале $[2, 3]$.

1.2. Методы уточнения корней

На втором этапе в пределах установленного интервала $[a, b]$ реализуется алгоритм уточнения корня (с заданной точностью) каким-либо итерационным методом, заключающимся в построении числовой последовательности $x^{(k)}$ ($k=0, 1, 2, \dots$), сходящейся к искомому корню x^* .

1.2.1. Метод половинного деления (дихотомии, бисекции)

Алгоритм уточнения корня уравнения (1) на интервале $[a, b]$ (при условии непрерывности функции $f(x)$) заключается в следующем. Исходный интервал делится пополам. Если выполняется равенство $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$

(рис. 1.3а), то $x^* = \frac{a+b}{2}$ является корнем уравнения (1). В противном случае выбирается та из половин $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ (рис. 1.3б) или $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ (рис. 1.3в), на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки.

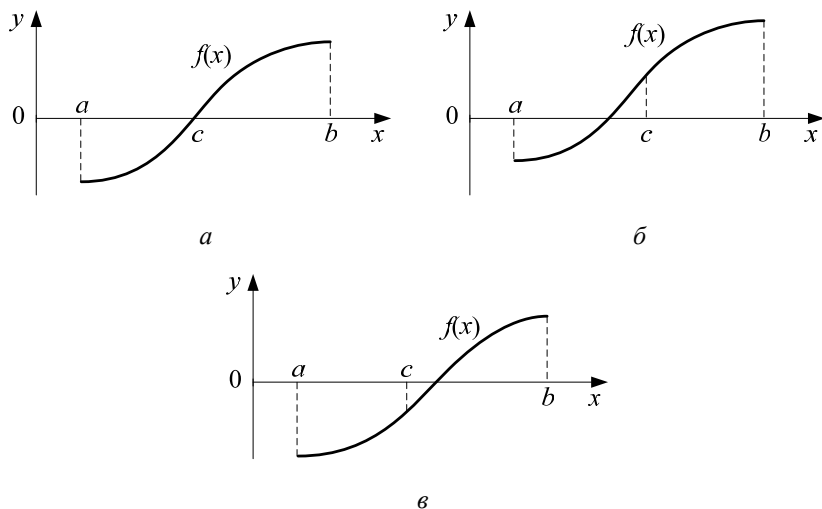


Рис. 1.3. Графическая иллюстрация метода половинного деления:

- (а) корень уравнения $x^* = \frac{a+b}{2}$;
- (б) корень уравнения расположен в интервале $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$;
- (в) корень уравнения расположен в интервале $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

Далее суженный интервал $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ делится пополам, и рассмотрение повторяется аналогично предыдущему шагу. В ходе реализации алгоритма на каком-то шаге находится точный корень уравнения (1) или интервал, удовлетворяющий точности ϵ определения искомого корня. Длина этого интервала должна быть меньше 2ϵ , а его середина будет являться значением корня с заданной точностью.

Преимущество метода:

- абсолютная сходимость.

Недостатки метода:

- медленная сходимость;
- не обобщается на систему уравнений.

1.2.2. Метод Ньютона (касательных)

Данный метод при нахождении корня уравнения (1) заключается в реализации итерационного процесса (рис. 1.4) в соответствии с выражением:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

В качестве начального приближения выбирается значение $x^{(0)}$ из интервала $[a, b]$. Условия сходимости данного метода определяются теоремой.

Теорема. Пусть на интервале $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет первую и вторую производные постоянного знака, а также выполняется условие $f(a)f(b)<0$. Если точка $x^{(0)}$ выбрана на интервале $[a, b]$ так, что $f(x^{(0)})f''(x^{(0)})>0$, то начиная с нее последовательность, определяемая выражением (3), монотонно сходится к корню x^* уравнения (1).

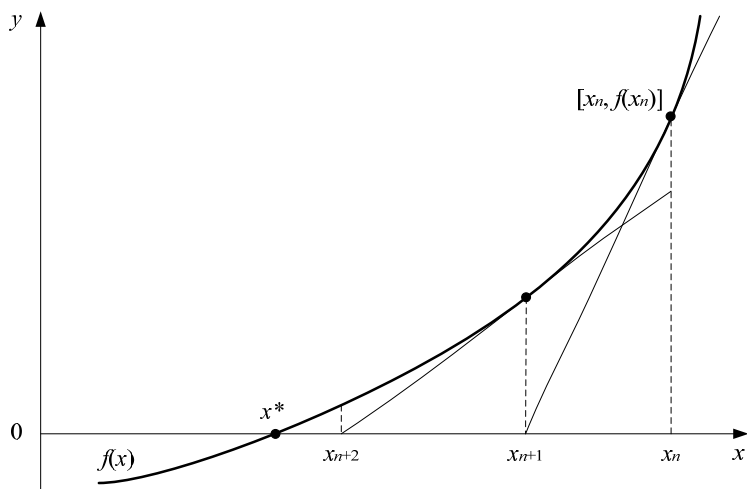


Рис. 1.4. Графическая иллюстрация метода Ньютона

На практике в качестве условия окончания итераций используется выражение $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$, соответственно $x^* \approx x^{(k+1)}$.

Метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости. Последняя принимает максимальные значения при выполнении условий:

- начальное приближение выбрано достаточно близким к корню уравнения;
- первая производная $f'(x)$ не слишком близка к нулю;
- вторая производная $f''(x)$ не принимает больших значений.

1.2.3. Метод секущих

Метод секущих является модифицированным методом Ньютона, который заключается в замене производной функции в выражении (3) разностным аналогом:

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}.$$

Итерационный процесс (рис. 1.5) реализуется в соответствии с выражением:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

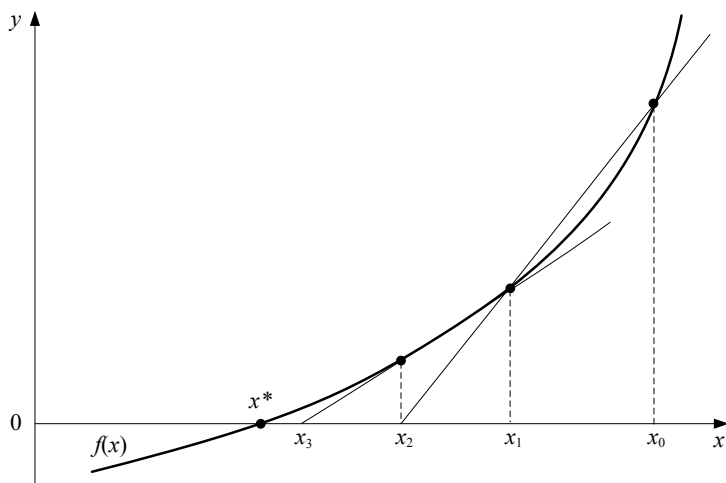


Рис. 1.5. Графическая иллюстрация метода секущих

Преимуществом метода секущих по сравнению с методом Ньютона является отсутствие необходимости расчета производной функции на каждом шаге проводимых вычислений, однако скорость сходимости данного метода ниже аналогичной характеристики для метода Ньютона.

Метод секущих является двухшаговым, т.к. согласно выражению (4) значение искомого корня на новом шаге $(k+1)$ зависит от значений функции на двух предыдущих шагах k и $(k-1)$.

Для выполнения первой итерации требуется задание двух начальных точек $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$. Выбор $x^{(0)}$ осуществляется аналогично принципу, изложенному при описании метода Ньютона. Вторая начальная точка $x^{(1)}$ выбирается в непосредственной близости от $x^{(1)}$, в оптимальном случае – между точкой $x^{(0)}$ и искомым корнем уравнения.

Условием окончания итераций является выполнение неравенства:

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon.$$

1.2.4. Метод простой итерации

В рамках метода простой итерации уравнение (1) заменяется эквивалентным уравнением с линейным членом:

$$x = \varphi(x). \quad (5)$$

Решение уравнения определяется путем построения с некоторого заданного значения $x^{(0)}$ последовательности:

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Если $\varphi(x)$ – непрерывная функция, а $x^{(k)}$ – сходящаяся последовательность, то значение $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ является решением уравнения (5).

Условия сходимости метода и оценка его погрешности определяются следующей теоремой.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на интервале $[a, b]$. Тогда если выполняются условия:

- $\varphi(x) \in [a, b]$ для каждого $x \in [a, b]$,
- существует такое q , что $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ для каждого $x \in (a, b)$,

то уравнение (5) имеет единственный корень x^* на интервале $[a, b]$. К этому корню сходится определяемая методом простой итерации последовательность $x^{(k)}$, начинающаяся с любого $x^{(0)} \in [a, b]$. При этом справедливы оценки погрешности:

$$|x^* - x^{(k+1)}| \leq \frac{q}{1-q} |x^{(k+1)} - x^{(k)}|,$$

$$\left| x^* - x^{(k+1)} \right| \leq \frac{q^{(k+1)}}{1-q} \left| x^{(1)} - x^{(0)} \right|.$$

Если $\varphi'(x)$ положительна, то последовательные приближения $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ сходятся к корню монотонно (рис. 1.6 а).

Если $\varphi'(x)$ отрицательна, то последовательные приближения колеблются около корня (рис. 1.6 б).

В случае $|\varphi'(x)| > 1$ процесс итерации расходится (рис. 1.6 в).

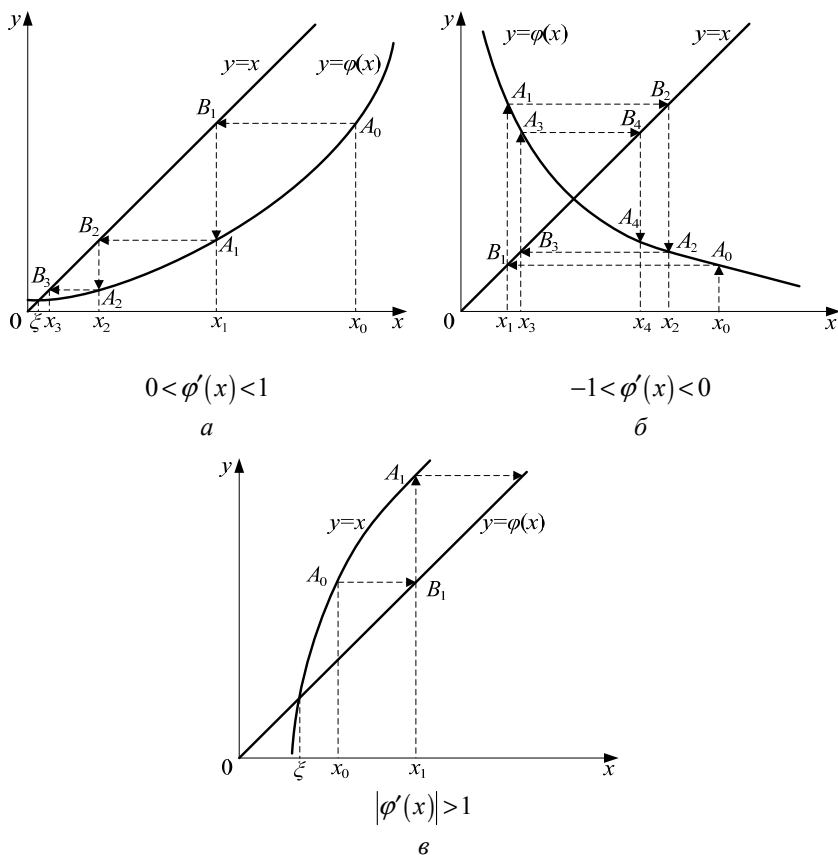


Рис. 1.6. Графическая иллюстрация метода итераций

Сходимость метода итерации линейная с коэффициентом сходимости $\alpha=q$. Чем меньше значение q , тем выше скорость сходимости итерационно-

го процесса.

Если преобразование уравнения (1) к виду (5) не позволяет получить уравнение, для которого выполняются условия сходимости метода простой итерации, то можно преобразовать уравнение (1) к эквивалентному виду:

$$x = x - \lambda f(x).$$

Данное уравнение имеет вид уравнения (5) с $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$. Параметр λ подбирается таким образом, чтобы в заданном интервале выполнялось неравенство $|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| \leq q < 1$.

1.3. Пример решения нелинейного уравнения

Требуется решить уравнение

$$y = e^{3x} + 20x - 15 \quad (7)$$

в рамках методов, приведенных в п. 1.2 с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Для локализации корней графическим способом исходное уравнение (7) преобразуем к виду:

$$e^{3x} = 15 - 20x.$$

На рисунке 1.7 приведены графики функций $f_1(x) = e^{3x}$, $f_2(x) = 15 - 20x$.

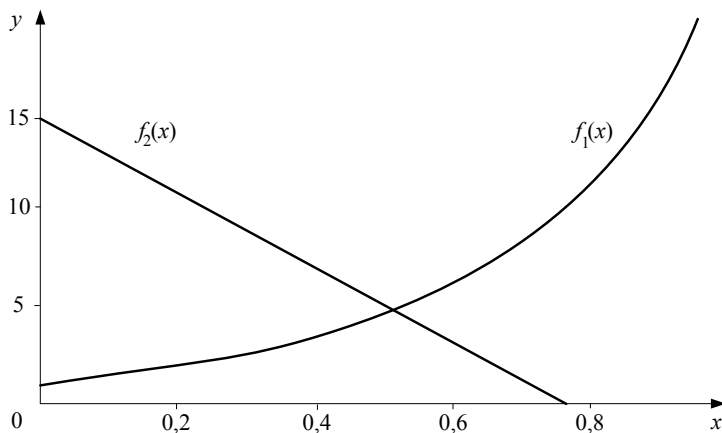


Рис. 1.7. Графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$

Исходное уравнение имеет только один корень в интервале $0,4 \leq x \leq 0,6$. Уточним значение корня в рамках методов половинного деления, Ньютона, секущих, итераций. В качестве исходного интервала $[a, b]$ выберем $[0,4, 0,6]$.

1.3.1. Метод половинного деления

В соответствии с алгоритмом реализации метода половинного деления результаты вычислений приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Результаты вычисления корня уравнения (7) в рамках метода половинного деления

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$f(a^{(k)})$	$f(b^{(k)})$	$\frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$	$f\left(\frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}\right)$
0	0,4000	0,6000	-3,6799	3,0496	0,5000	-0,5183
1	0,5000	0,6000	-0,5183	3,0496	0,5500	1,2070
2	0,5000	0,5500	-0,5183	1,2070	0,5250	0,3307
3	0,5000	0,5250	-0,5183	0,3307	0,5125	-0,0971
4	0,5125	0,5250	-0,0971	0,3307	0,5188	0,1160
5	0,5125	0,5188	-0,0971	0,1177	0,5157	0,0101
6	0,5125	0,5157	-0,0971	0,0118	0,5141	-0,0427
7	0,5141	0,5157	-0,0427	0,0118	[0,5149]	-

Искомый корень уравнения (7) $x^* \approx 0,515$, установленный с точностью $\varepsilon=0,001$.

1.3.2. Метод Ньютона

Для корректного использования метода Ньютона необходимо определить поведение функции на интервале $[a, b]$ и правильно выбрать начальное приближение $x^{(0)}$.

Для функции $f(x)=e^{3x}+20x-15$ первая и вторая производные $f'(x)=3e^{3x}+20$ и $f''(x)=9e^{3x}$, соответственно, положительны на всем интервале $[0,4, 0,6]$.

В качестве начального приближения выберем правую границу интервала $x^{(0)}=0,6$, для которой выполняется неравенство:

$$f(0,6)f''(0,6)>0.$$

Дальнейшие вычисления проводятся согласно выражению (3), где:

$$f(x^{(k)})=e^{3x^{(k)}}+20x^{(k)}-15, \quad f'(x^{(k)})=3e^{3x^{(k)}}+20.$$

Итерации производятся до выполнения условия $|x^{(k+1)}-x^{(k)}|<\varepsilon$.

Результаты вычислений приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

Результаты вычисления корня уравнения (7) в рамках метода Ньютона

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$	$-f(x^{(k)})/f'(x^{(k)})$
0	0,6000	3,0496	38,1489	-0,0799
1	0,5201	0,1609	34,2790	-0,0047
2	0,5154	0,0005	34,0794	-0,000014
3	[0,5154]	—	—	—

Искомый корень уравнения (7) $x^* \approx 0,515$, установленный с точностью $\varepsilon=0,001$.

1.3.3. Метод секущих

В соответствии с алгоритмом решения в качестве начальных точек зададим $x^{(0)}=0,6$ и $x^{(1)}=0,59$. Вычисления выполним по выражению (4), где $f(x^{(k)}) = e^{3x^{(k)}} + 20x^{(k)} - 15$.

Итерации завершаются при выполнении условия $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$.

Результаты вычислений приведены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

Результаты вычисления корня уравнения (7) в рамках метода секущих

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
0	0,6000	3,0496
1	0,5900	2,6709
2	0,5195	0,1414
3	0,5156	0,0067
4	0,5154	0,000017
5	[0,5154]	—

Искомый корень уравнения (7) $x^* \approx 0,515$, установленный с точностью $\varepsilon=0,001$.

1.3.4. Метод простой итерации

Уравнение (7) можно представить в виде:

$$x = \frac{15 - e^{3x}}{20}.$$

Приняв интервал $[0,4, 0,6]$ и положив $\varphi(x) = \frac{15 - e^{3x}}{20}$, выполняются ус-

ловия теоремы:

- 1) $\varphi(x) \in [0,4, 0,6]$ для каждого $x \in [0,4, 0,6]$;
- 2) $\varphi'(x) = -\frac{3}{20}e^{3x}$. Для каждого $x \in (0,4, 0,6)$ $|\varphi'(x)| < 0,91 = q$.

В качестве начального приближения положим $x^{(0)} = (0,4+0,6)/2 = 0,5$.

Последовательные приближения $x^{(k)}$ вычислим по выражению (6), где

$$\varphi(x^{(k)}) = \frac{15 - e^{3x^{(k)}}}{20}.$$

Достижение требуемой точности контролируется условием

$$\frac{q}{1-q} |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5

Результаты вычисления корня уравнения (7) в рамках метода простой итерации

k	$x^{(k)}$	$\varphi(x^{(k)})$
0	0,5000	0,5259
1	0,5259	0,5078
2	0,5078	0,5206
3	0,5206	0,5116
4	0,5116	0,5180
5	0,5180	0,5135
6	0,5135	0,5166
7	0,5166	0,5144
8	0,5144	0,5160
9	0,5160	0,5149
10	0,5149	0,5157
11	0,5157	0,5151
12	0,5151	0,5155
13	0,5155	0,5152
14	0,5152	0,5154
15	0,5154	0,5153
16	[0,5153]	—

Искомый корень уравнения (7) $x^* \approx 0,515$, установленный с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Глава 2

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

На практике достаточно большое число задач сводится к вычислению значения определенного интеграла некоторой функции, например, для установления площадей (рис. 2.1) или объемов различных фигур и тел, пути, пройденного точкой в условиях неравномерного движения, определения центров тяжести и инерции тел, работы произведенной некоторыми силами и т.д.

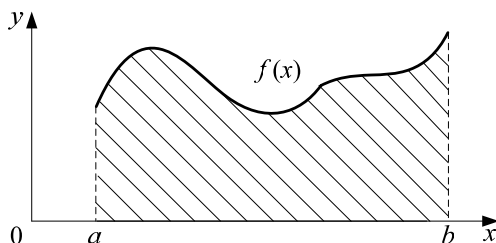


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация определенного интеграла

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

Аналитическое решение таких задач, как правило, существует только для достаточно ограниченного числа подынтегральных функций $f(x)$. В этом случае первообразную можно представить в виде комбинации алгебраических и трансцендентных функций.

Достаточно часто первообразную $F(x)$ невозможно выразить через элементарные функции. Кроме этого, функция $f(x)$ может задаваться не в виде непрерывной функции, а в виде таблицы ее значений на фиксированном конечном множестве точек. В этом случае понятие первообразной теряет смысл, поэтому для вычисления интеграла применяют *численные методы* [5–8].

Задача численного интегрирования состоит в нахождении приближенного значения определенного интеграла с помощью некоторой приближенной формулы через известные значения подынтегральной функции $f(x)$ (иногда через значения ее производных) в заданных точках.

Методы вычисления однократных интегралов называются *квадратурными*, кратных интегралов – *кубатурными*.

В рамках такого подхода искомый интеграл заменяется линейной комбинацией (линейной функцией) значений подынтегральной функции $f(x_i)$ в $(k+1)$ точках интервала $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^k A_i f(x_i) + R,$$

где A_i – весовые коэффициенты, x_i – узловые точки, R – погрешность квадратурной формулы.

Принцип построения квадратурных формул состоит в следующем. Подынтегральная функция $f(x)$ на интервале $[a, b]$ заменяется интерполирующей функцией достаточно простого вида (например, интерполяционным многочленом), от которой легко находится интеграл. Исходный интервал $[a, b]$ разделяется на $(k-1)$ интервалов с шагом:

$$h = \frac{b-a}{k-1}.$$

На каждом из полученных интервалов $[x_i, x_{i+1}]$ строится интерполяционный многочлен. Искомый интеграл вычисляется как сумма k частичных интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)dx. \quad (8)$$

Существует достаточно большое число методов интегрирования:

1. *Методы Ньютона–Котеса* основаны на представлении функции $\varphi(x)$ в выражении (8) полиномом различных степеней. К данному классу методов относятся методы прямоугольников, трапеций, Симпсона.
2. *Методы статистических испытаний (методы Монте-Карло)* заключаются в выборе узлов сетки для квадратурного или кубатурного ин-

тегрирования на интервале $[a, b]$ с помощью датчика случайных чисел. Конечный результат имеет вероятностный характер. Такие методы, как правило, применяются для вычисления кратных интегралов.

3. *Сплайновые методы* основаны на представлении функции $\varphi(x)$ в выражении (8) кусочным полиномом с условиями связи между отдельными полиномами посредством системы коэффициентов [9, 10].
4. *Методы наивысшей алгебраической точности* заключаются в оптимальной расстановке узлов сетки интегрирования на интервале $[a, b]$ и выборе весовых коэффициентов при замене исходной подынтегральной функции интерполирующей функцией достаточно простого вида. К данному классу методов относятся методы Гаусса-Кристоффеля (вычисление несобственных интегралов), Маркова.

2.1. Наиболее распространенные методы численного интегрирования

2.1.1. Метод прямоугольников

Различают методы левых, правых и средних прямоугольников. Рисунок 2.2 иллюстрирует суть соответствующих методов.

Интервал интегрирования разбивается на n равных частей точками x_k ($k=0, 1, 2, \dots, n$), $x_0=a$, $x_n=b$. Длина каждого отрезка $h=(b-a)/n$. На каждом шаге интегрирования исходная подынтегральная функция аппроксимируется полиномом нулевой степени – отрезком, параллельным оси абсцисс. Значения подынтегральной функции в узловых точках: $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, $\dots$, $y_n=f(x_n)$.

Кусочно-гладкая функция заменяется ступенчатой функцией, которая в пределах каждого элементарного отрезка принимает постоянное значение, равное, значению подынтегральной функции на левом конце отрезка (метод левых прямоугольников), на правом конце отрезка (метод правых прямоугольников) и в середине отрезка (метод средних прямоугольников). Геометрически это означает, что искомый интеграл приближенно вычисляется как сумма площадей n элементарных прямоугольников (рис. 2.2).

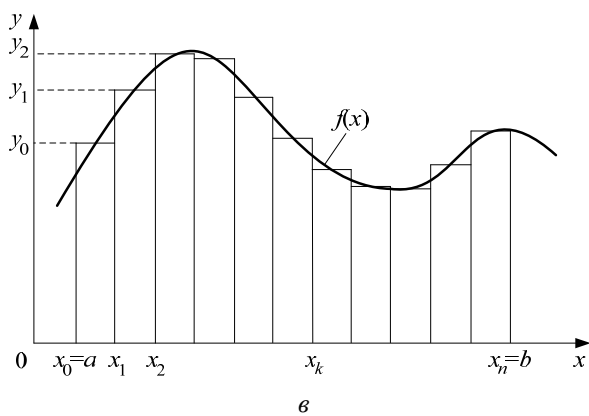
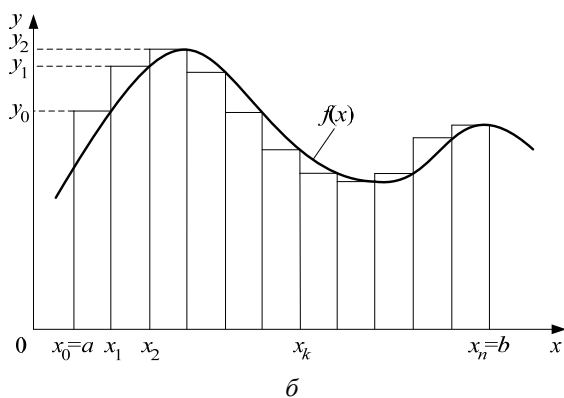
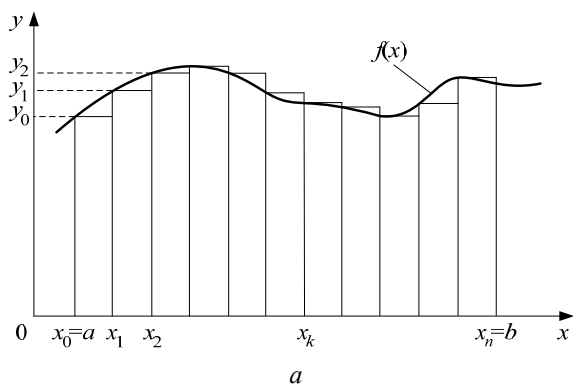


Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация методов левых (a), правых ($\bar{б}$), средних ($в$) прямоугольников

Выражения для вычисления интеграла в рамках методов:
левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)h + f(x_1)h + \dots + f(x_{n-1})h = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k);$$

правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_1)h + f(x_2)h + \dots + f(x_n)h = h \sum_{k=1}^n f(x_k);$$

средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0 + h/2)h + f(x_1 + h/2)h + \dots + f(x_{n-1} + h/2)h = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + h/2).$$

Метод прямоугольников имеет первый порядок точности. Для непрерывно дифференцируемой функции погрешность убывает по линейному закону при уменьшении величины шага h . Погрешность метода определяется выражением:

$$R \leq \frac{b-a}{2} h \max_{[a, b]} |f'(x)|.$$

2.1.2. Метод трапеций

В отличие от метода прямоугольников аппроксимация подынтегральной функции осуществляется кусочно-линейной функцией (полиномом первой степени). В пределах каждого элементарного отрезка функция аппроксимируется прямой линией, проходящей через две соседние точки с координатами $[x_k, f(x_k)]$ и $[x_{k+1}, f(x_{k+1})]$ (рис. 2.3). Это позволяет приближенно определить значение искомого интеграла, суммой площадей n элементарных трапеций.

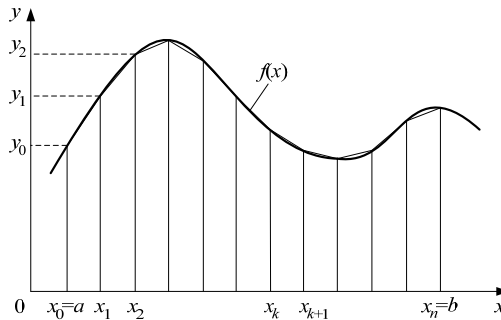


Рис. 2.3. Геометрическая интерпретация метода трапеций

Выражения для вычисления интеграла в рамках метода трапеций:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= (f(x_0) + f(x_1))h/2 + (f(x_1) + f(x_2))h/2 + \dots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))h/2 = \\ &= h/2(f(x_0) + f(x_n)) + h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k). \end{aligned}$$

Метод трапеций имеет второй порядок точности. Погрешность убывает по квадратичному закону при уменьшении величины шага h . Погрешность метода определяется выражением:

$$R \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

2.1.3. Метод Симпсона

Метод Симпсона заключается в разбиении интервала интегрирования $[a, b]$ на четное количество равных отрезков. На каждом двух смежных элементарных отрезках $[x_k, x_{k+2}]$ подынтегральная функция заменяется интерполяционным полиномом второй степени или интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, проходящим через точки x_k, x_{k+1}, x_{k+2} . В пределах сдвоенного интервала $[x_k, x_{k+2}]$ подынтегральная функция заменяется параболой, проходящей через три соседние точки с координатами $[x_k, f(x_k)], [x_{k+1}, f(x_{k+1})], [x_{k+2}, f(x_{k+2})]$ (рис. 2.4).

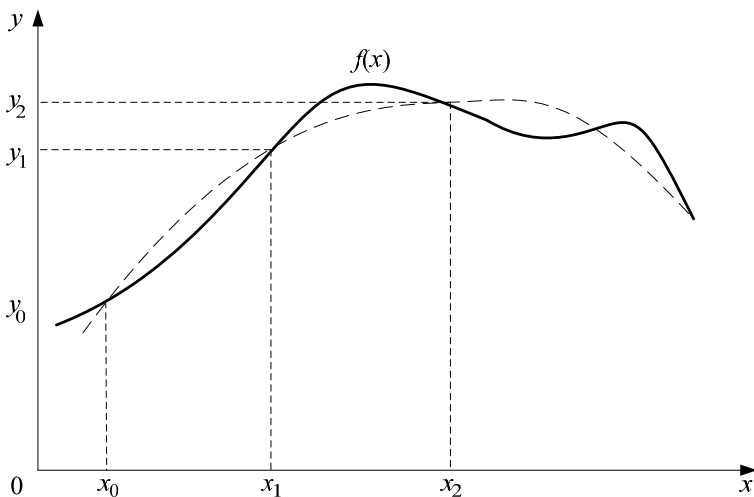


Рис. 2.4. Геометрическая интерпретация метода Симпсона

Площадь исходной криволинейной трапеции заменяется суммой n площадей элементарных криволинейных трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Метод Симпсона имеет четвертый порядок точности. Для функции, имеющей непрерывную четвертую производную, выражение для расчета погрешности:

$$R \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{[a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

2.2. Пример решения задачи численного интегрирования

В рамках рассмотренных в п. 2.1 методов численного интегрирования требуется вычислить интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Аналитическое решение имеет вид:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0,6931.$$

Разобьем интервал интегрирования на 10 равных частей, т.е. $n=10$. Значения подынтегральной функции в узловых точках приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1.

Значения функции в узловых точках

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	0,1	0,9091
2	0,2	0,8333
3	0,3	0,7692
4	0,4	0,7143
5	0,5	0,6667
6	0,6	0,6250
7	0,7	0,5882
8	0,8	0,5556
9	0,9	0,5263
10	1	0,5

В соответствии с выражением для вычисления интеграла в рамках метода левых прямоугольников:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1-0}{10} (1+0,9091+0,8333+0,7692+0,7143+0,6667+0,6250+0,5880+0,5556+0,5263) = 0,7188.$$

Согласно выражению для вычисления интеграла в рамках метода правых прямоугольников:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1-0}{10} (0,9091+0,8333+0,7692+0,7143+0,6667+0,6250+0,5880+0,5556+0,5263+0,5) = 0,6688.$$

В соответствии с выражением для вычисления интеграла в рамках метода Симпсона:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{0,1}{3} (1+4 \cdot 0,9091+2 \cdot 0,8333+4 \cdot 0,7692+2 \cdot 0,7143+4 \cdot 0,6667+2 \cdot 0,6250+4 \cdot 0,5880+2 \cdot 0,5556+4 \cdot 0,5263+0,5) = 0,6931.$$

Глава 3

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) применяются для описания многих реальных физических и химических процессов. Если физическая величина (например, перемещение тела, концентрация вещества, объем продаж продукта и т.д.) изменяется во времени под воздействием некоторых факторов, то закон, описывающий ее изменение, как правило, представляет собой дифференциальное уравнение, связывающее исходную переменную как функцию времени и производные этой функции. Независимой переменной в дифференциальных уравнениях может являться не только время, но и другие физические величины (например, координата, состав газовой смеси, цена продукта и т.д.). Решение таких уравнений позволяет установить общие закономерности изменения исходной физической величины.

Под *обыкновенным дифференциальным уравнением* понимается уравнение для функции одной переменной, содержащее производную этой функции [11–13]. Сама функция и независимая переменная могут и не входить в уравнение явным образом.

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком старшей производной, содержащейся в уравнении.

Наиболее общий вид ОДУ n -го порядка:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

где x – независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция.

Среди большой совокупности типов ОДУ можно выделить достаточно узкий класс уравнений, для которой применимы аналитические методы решения [14]. В таблицах 3.1 и 3.2 приведены основные типы дифференциальных уравнений и способы их аналитического решения.

Таблица 3.1

Уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка

Тип уравнения	Пример записи	Способ решения
Уравнения с разделяющимися переменными	$y' = f(x)g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
Однородные уравнения первого порядка	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$u = \frac{y}{x}, y = ux,$ $y' = u'x + u$
Линейные уравнения первого порядка	$y' + P(x)y = Q(x)$	$y = uv, y' = u'v + uv'$
Уравнения Бернулли	$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha,$ $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$	$y = uv, y' = u'v + uv'$
Уравнения, решаемые последовательным интегрированием	$y^{(n)} = f(x)$	$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$ $y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx + C_1x + C_2,$
Уравнения второго порядка, не содержащие явно функцию y	$y'' = f(x, y')$	$y' = p(x), y'' = p'(x)$
Уравнения второго порядка, не содержащие явно переменную x	$y'' = f(y, y')$	$y' = p(y), y'' = p \frac{dp}{dy}$
Уравнения, сводящиеся к однородным	$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right)$	$\begin{cases} \tilde{x} = x - x_0 \\ \tilde{y} = y - y_0 \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ mx_0 + ny_0 + p = 0 \end{cases}$
Уравнения в полных дифференциалах	$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$ $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$	$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y),$ $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y),$ $F(x, y) = C$

Таблица 3.1. Окончание

Уравнения, не разрешенные относительно производной	$y = f(x, y')$	$p = y'$, $pdx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp$, $\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = f(\varphi(p), p) \end{cases}$
	$x = f(y, y')$	$p = y'$, $\frac{dy}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp$, $\begin{cases} x = f(\varphi(p), p) \\ y = \varphi(p) \end{cases}$
Обобщенно однородные уравнения	уравнение не изменяется при замене $\tilde{x} = kx$, $\tilde{y} = k^m y$	$\begin{cases} x = e^t \\ y = z(t)e^{mt} \end{cases}$

Таблица 3.2

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Тип уравнения	Пример записи	Способ решения
Однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	$y'' + py' + qy = 0$	$k^2 + pk + q = 0$ – характеристическое уравнение (*) 1) $k_1 \neq k_2 \rightarrow y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ 2) $k_1 = k_2 \rightarrow y = (C_1 x + C_2) e^{k_1 x}$ 3) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \rightarrow y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
Неоднородные уравнения с правой частью $f(x)$ специального вида	$y'' + py' + qy = f(x)$	$y = y_o + y_q$, y_o – общее решение, y_q – частное решение
Правая часть вида $f(x) = P_n(x)e^{ax}$		1) $a \neq k_1, a \neq k_2 \rightarrow y_q = Q_n(x)e^{ax}$ 2) $a = k_1, a \neq k_2 \rightarrow y_q = x Q_n(x)e^{ax}$ 3) $a = k_1, a = k_2 \rightarrow y_q = x^2 Q_n(x)e^{ax}$
Правая часть вида $f(x) = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_n(x) \sin bx)$		1) $z = a \pm ib$ не является корнем уравнения (*) $\rightarrow y_q = e^{ax} (S_n(x) \cos bx + T_n(x) \sin bx)$ 2) $z = a \pm ib$ является корнем уравнения (*) $\rightarrow y_q = x e^{ax} (S_n(x) \cos bx + T_n(x) \sin bx)$

Решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество относительно переменной x .

Общим решением дифференциального уравнения является непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от переменной x и от произвольной константы C . Конкретное значение параметра C дает *частное решение* уравнения.

3.1. Начальные условия. Задача Коши

При описании каких-либо реальных процессов с помощью дифференциальных уравнений, как правило, задаются некоторые дополнительные условия, которые называются *начальными условиями*. Такие условия характеризуют поведение решения дифференциального уравнения (интегральной кривой) в некоторой точке или ее окрестности. Например, уравнение первого порядка может быть дополнено начальным условием вида:

$$y(x_0) = y_0.$$

Это условие позволяет выделить из семейства интегральных кривых единственную линию, проходящую через заданную точку. Таким образом находится значение параметра C , при подстановке которого в общее решение уравнения получается частное решение.

Задача о нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши*:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

3.2. Краевые условия. Краевая задача

Краевые условия в отличие от начальных задаются в нескольких разных точках, например:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

При решении *краевой задачи* требуется найти решение ОДУ с дополнительными условиями, заданными при нескольких различных значениях независимой переменной, например:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \\ y(a) &= A, \quad y(b) = B. \end{aligned}$$

Т.к. заданные точки, как правило, определяют границы области $a < x < b$, в которой ищется решение, то дополнительные условия так же называют *граничными*.

Одним из наиболее широко распространенных методов численного решения краевой задачи является метод конечных разностей.

Численное решение ОДУ [15] заключается в вычислении значений функции $y(x)$ и ее производных в точках, расположенных в пределах интервала $[a, b]$, т.е. решение получается в виде таблицы чисел.

3.3. Метод конечных разностей

Рассмотрим линейное ОДУ второго порядка с двумя краевыми (граничными) условиями на интервале $[a, b]$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \quad (9)$$

$$v_0 y(a) + \mu_0 y'(a) = \gamma_0, \quad (10)$$

$$v_1 y(b) + \mu_1 y'(b) = \gamma_1,$$

где $p(x)$, $q(x)$ – непрерывные функции, $v_0, \mu_0, \gamma_0, v_1, \mu_1, \gamma_1$ – константы.

Если $v_i=0, \mu_i=0$ ($i=0, 1$), то говорят, что заданы граничные условия первого рода, если $v_i=0, \mu_i \neq 0$, то граничные условия второго рода, если $v_i \neq 0, \mu_i \neq 0$, то граничные условия третьего рода.

В отличие от задачи Коши, которая всегда имеет единственное решение, краевая задача может иметь одно решение, бесконечное множество решений или не иметь решения.

Суть метода конечных разностей заключается в следующем [16]. Интервал $[a, b]$ разбивается точками x_i на n равных отрезков длиной h (рис. 3.1), причем $i=1, 2, \dots, N$; $x_1=a, x_N=b$. Это множество точек называется сеткой с узлами x_i и шагом $h=x_{i+1}-x_i$.

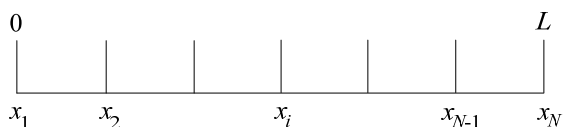


Рис. 3.1. Конечно-разностная сетка

Представим функцию y в узлах сетки в виде разностных аналогов [17]. В (9) производные заменим центральными разностями, получим разностное уравнение:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i=2, \dots, N-1. \quad (11)$$

Аналогичные преобразования выполним для граничных условий:

$$v_0 y_0 + \mu_0 \frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma_0, \quad (12)$$

$$v_1 y_N + \mu_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \gamma_1.$$

«Двухточечная» аппроксимация граничных условий позволяет реализовать метод прогонки при решении разностного уравнения (11).

В результате выполненных преобразований краевая дифференциальная задача заменена разностной, которая также называется разностной схемой. Для $N+1$ сеточной функции получили $N+1$ линейных алгебраических уравнений. Решение задачи (11), (12) в узлах разностной сетки будет сколь угодно мало отличаться от точного решения исходной дифференциальной задачи (9), (10) при неограниченном измельчении шага $h \rightarrow 0$.

Порядок аппроксимации разностной схемы равен наименьшему из порядков аппроксимации во внутренних и в граничных узлах разностной сетки. Схема (11), (12) имеет первый порядок аппроксимации.

Далее показан способ повышения порядка аппроксимации (до второго) в рамках «двухточечной» аппроксимации граничных условий, а также приведено описание алгоритма реализации метода прогонки. Разностное уравнение (11) можно представить в наиболее общем виде. Аппроксимируем производные в (10) односторонними разностями со вторым порядком точности. Получим разностную схему вида:

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = F_i, \quad i=2, \dots, N-1, \quad (13)$$

$$v_0 y_0 + \mu_0 \frac{-3y_1 + 4y_0 - y_2}{2h} = \gamma_0,$$

$$v_1 y_N + \mu_1 \frac{y_{N-2} - 4y_{N-1} + 3y_N}{2h} = \gamma_1,$$

где $A_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}$, $B_i = \frac{2}{h^2} - q_i$, $C_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}$, $F_i = f_i$.

Уравнения вида (13) называются трехточечными разностными уравнениями второго порядка, а система таких уравнений имеет трехдиагональную структуру.

Положим, что существуют такие наборы чисел α_i и β_i ($i=1, 2, \dots, N-1$), при которых

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i, \quad (14)$$

т.е. трехточечное уравнение второго порядка (13) преобразуется в двухто-

чечное уравнение первого порядка (14). Уменьшим в связи (7) индекс на единицу и полученное выражение $y_{i-1} = \alpha_{i-1}y_i + \beta_{i-1}$ подставим в уравнение (13):

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i \alpha_{i-1} y_i + C_i \beta_{i-1} = F_i,$$

откуда получаем:

$$y_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}} y_{i+1} + \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}.$$

Полученное выражение имеет вид (14) и будет с ним совпадать, если при всех $i = 2, \dots, N-1$ выполняются соотношения:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}. \quad (15)$$

Полученные соотношения (15) называются *прогночными коэффициентами*. Для определения α_i и β_i при $i = 2, \dots, N-1$ необходимо знать α_1 и β_1 , которые находятся из левого граничного условия. В результате *прямой прогонки* от $i = 2$ до $i = N-1$ находятся значения прогночных коэффициентов.

Из правого граничного условия находится y_N . Далее по формуле (14) в результате *обратной прогонки* от $i = N-1$ до $i = 2$ последовательно находятся значения функции y_i .

Для успешного применения метода прогонки нужно, чтобы в процессе вычислений не возникало ситуаций с делением на нуль, а при больших размерностях систем не должно быть быстрого роста погрешностей округлений.

Будем называть прогонку корректной, если знаменатели прогночных коэффициентов (15) не обращаются в нуль, и устойчивой, если $|\alpha_i| < 1$ при всех $i = 1, \dots, N-1$.

Возвращаясь к системе (13), определим прогночные коэффициенты α_1, β_1 и значение функции y_N .

На левой границе ($i=1$) исключая величину y_2 из имеющей здесь место системы уравнений

$$\begin{aligned} A_1 y_2 - B_1 y_1 + C_1 y_0 &= F_1, \\ v_0 y_0 + \mu_0 \frac{-3y_1 + 4y_0 - y_2}{2h} &= \gamma_0 \end{aligned}$$

получим «двухточечную» аппроксимацию левого краевого условия со вторым порядком точности:

$$\left[v_0 + \frac{\mu_0}{h} \left(2 + \frac{C_1}{2A_1} \right) \right] y_0 - \frac{\mu_0}{2h} \left(\frac{B_1}{A_1} + 3 \right) y_1 = \gamma_0 + \frac{\mu_0}{2h} \frac{F_1}{A_1}. \quad (16)$$

Аналогично на правой границе при $i = N$, исключая величину y_{N-2} из системы уравнений

$$A_{N-1}y_N - B_{N-1}y_{N-1} + C_{N-1}y_{N-2} = F_{N-1},$$

$$v_1y_N + \mu_1 \frac{y_{N-2} - 4y_{N-1} + 3y_N}{2h} = \gamma_1$$

запишем аппроксимацию правого краевого условия:

$$\left[v_1 + \frac{\mu_1}{2h} \left(3 - \frac{A_{N-1}}{C_{N-1}} \right) \right] y_N + \frac{\mu_1}{h} \left(\frac{B_{N-1}}{2C_{N-1}} - 2 \right) y_{N-1} = \gamma_1 - \frac{\mu_1}{2h} \frac{F_{N-1}}{C_{N-1}}. \quad (17)$$

Представив выражение (16) в виде $y_0 = \alpha_0 y_1 + \beta_0$ и выражение (17) в виде $y_N = \alpha_N y_{N-1} + \beta_N$ получим значения прогоночных коэффициентов на левой границе

$$\alpha_0 = \frac{\mu_0}{2h} \left(\frac{B_1}{A_1} + 3 \right) \bigg/ \left[v_0 + \frac{\mu_0}{h} \left(2 + \frac{C_1}{2A_1} \right) \right],$$

$$\beta_0 = \left[\gamma_0 + \frac{\mu_0}{2h} \frac{F_1}{A_1} \right] \bigg/ \left[v_0 + \frac{\mu_0}{h} \left(2 + \frac{C_1}{2A_1} \right) \right]$$

и на правой границе

$$\alpha_N = \frac{\mu_1}{h} \left(2 - \frac{B_{N-1}}{2C_{N-1}} \right) \bigg/ \left[v_1 + \frac{\mu_1}{2h} \left(3 - \frac{A_{N-1}}{C_{N-1}} \right) \right],$$

$$\beta_N = \left[\gamma_1 - \frac{\mu_1}{2h} \frac{F_{N-1}}{C_{N-1}} \right] \bigg/ \left[v_1 + \frac{\mu_1}{2h} \left(3 - \frac{A_{N-1}}{C_{N-1}} \right) \right].$$

Из совместного решения уравнений:

$$y_{N-1} = \alpha_{N-1}y_N + \beta_{N-1} \text{ и } y_N = \alpha_N y_{N-1} + \beta_N$$

получим выражение для вычисления значения функции на правой границе:

$$y_N = \frac{\beta_N + \alpha_N \beta_{N-1}}{1 - \alpha_N \alpha_{N-1}}.$$

Блок-схема алгоритма численного решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей:



3.4. Метод простой итерации

Рассмотрим нелинейное ОДУ второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) + \varphi(y). \quad (18)$$

Слагаемое $\varphi(y)$ в правой части уравнения характеризует его нелинейность.

После перехода к разностной схеме получим выражение, аналогичное (13):

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = F_i,$$

$$\text{где } A_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}, \quad B_i = \frac{2}{h^2} - q_i, \quad C_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}, \quad F_i = f_i + \varphi_i.$$

Коэффициент F_i зависит от искомого значения функции y_i в данном узле разностной сетки, поэтому для нахождения y_i необходимо воспользоваться методом простой итерации. Данный метод определяется в опреде-

лении y_i в каждой точке разностной схемы до тех пор, пока разность между локальными значениями y_i на данной и на предыдущей итерации не будет минимальна:

$$\max_i |y_i^{s+1} - y_i^s| \leq \varepsilon,$$

где ε – точность вычислений.

Блок-схема алгоритма численного решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом простой итерации:



3.5. Пример численного решения краевой задачи

Найти решение задачи:

$$y'' + 4y' - y = x.$$

Граничные условия:

$$x=0: y=y'=0;$$

$$x=1: y=y'=1.$$

Сформулированную задачу будем решать методом конечных разностей на равномерной пространственной сетке (рис. 3.1). В исходном уравнении заменим дифференциальные операторы на их конечно-разностные аналоги. Полученную систему уравнений

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 4 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - y_i = x_i, \quad i=2, \dots, N-1$$

сведем к виду:

$$A_i T_{i+1} - B_i T_i + C_i T_{i-1} = F_i, \quad i=2, \dots, N-1,$$

$$\text{где } A_i = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{h}, \quad B_i = \frac{2}{h^2} + 1, \quad C_i = \frac{1}{h^2} - \frac{2}{h}, \quad F_i = x_i.$$

Записанное уравнение решим методом прогонки. Значения функции будем искать в виде (14), а прогоночные коэффициенты α_i и β_i ($i = 2, 3, \dots, N-1$) из соотношений (15).

Прогоночные коэффициенты в первом узле разностной сетки определяются в соответствии с левым граничным условием:

$$y_1 = \alpha_1 y_2 + \beta_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0.$$

Значение функции при $i=N$ соответствует левому граничному условию:

$$y_N = 1.$$

В результате прямой прогонки последовательно рассчитываются значения прогоночных коэффициентов α_i и β_i в узлах разностной сетки при $i = 2, 3, \dots, N-1$. При обратной прогонке $i = N-1, N-2, \dots, 1$ последовательно вычисляются значения функции.

Листинг программы численного решения рассматриваемой задачи (на языке программирования MATLAB).

```
clc; clear all;
```

```
%Ввод данных
```

```
x1=0; %Координата левой границы
```

```

yl=0; %Значение функции на левой границе
xr=1; %Координата правой границы
yr=1; %Значение функции на правой границе
N=11; %Количество пространственных узлов

```

```

%Характеристика внутренних переменных для MATLAB

```

```

A = zeros(11);
B = zeros(11);
C = zeros(11);
F = zeros(11);
T = zeros(11);
a = zeros(11);
b = zeros(11);
x = zeros(11);

```

```

%Решение

```

```

%Шаг разностной сетки по пространственной координате
h=(xr-xl)/(N-1);

```

```

%Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого граничного ус-
ловия

```

```

a(1)=0;
b(1)=yl;

```

```

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям (15)
for i=2:N-1

```

```

    %Текущая координата
    x(i)=h*(i-1);
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональ-
    ной матрицей
    A(i)=1/(h^2)+2/h;
    B(i)=2/(h^2)+1;
    C(i)=1/(h^2)-2/h;
    F(i)=x(i);
    %Прогоночные коэффициенты
    a(i)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1));
    b(i)=(C(i)*b(i-1)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1));
end;

```

```

%Координата и значение функции на правой границе
x(N)=xr;
y(N)=yr;
i=N-1;

```



```
%Обратная прогонка
while i>=1
    y(i)=a(i)*y(i+1)+b(i);
    i=i-1;
end;
```

```
%Вывод графика
plot(x(1:N),y(1:N));
```

Результаты расчета приведены в таблице 3.3 и на рисунке 3.2.

Таблица 3.3

Значения функции в узлах разностной сетки

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	0,2738	0,4595	0,5888	0,6824	0,7538	0,8118	0,8623	0,9090	0,9543	1

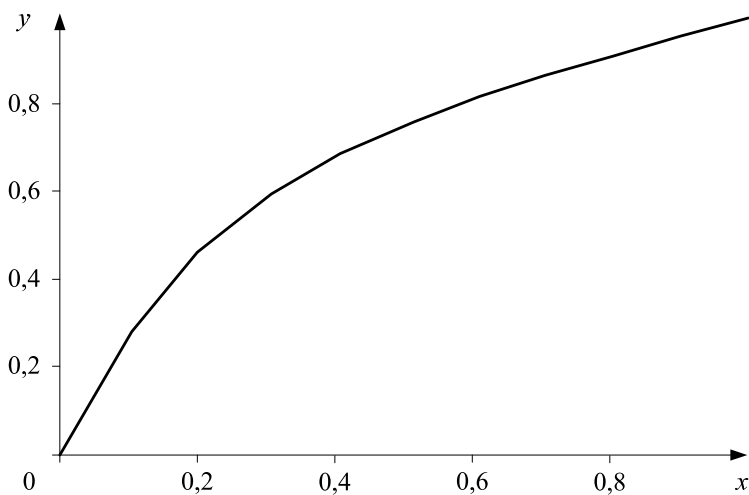


Рис. 3.2. График функции

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Уравнения в частных производных в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений содержат более одной независимой переменной. Такими переменными могут быть, например, одновременно пространственные координаты и время или только пространственные координаты для статической задачи. В уравнениях производные от функций по любой из независимых переменных являются частными. Также уравнения могут содержать смешанные производные. Уравнение в частных производных может быть представлено в виде:

$$F(x, y, \dots; u, u_x, u_y, \dots; u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0,$$

где $x, y, \dots$ – независимые переменные; $u = u(x, y, \dots)$ – искомая функция;

$$u_x = \frac{du}{dx}, \quad u_y = \frac{du}{dy}, \quad u_{xx} = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad u_{xy} = \frac{d^2u}{dxdy}, \dots$$

Далее будем понимать, что все фигурирующие функции по умолчанию являются непрерывными и имеющими непрерывные производные соответствующих порядков.

Порядок дифференциального уравнения в частных производных определяется порядком старшей производной, содержащейся в уравнении.

Любое дифференциальное уравнение в частных производных имеет бесконечное множество решений. На практике наибольший интерес представляют решения, удовлетворяющие дополнительным условиям. Как правило, задачи, описывающие физические или химические процессы в рамках дифференциальных уравнений в частных производных, включают в себя краевые условия. Принято различать начальные и граничные условия. Последние характеризуют поведение решения задачи на некоторой гра-

ничной линии (поверхности) или в ее окрестности. Начальные же условия представляют собой краевые условия во времени, которые, например, характеризуют распределение искомой функции в начальный момент времени.

4.1. Уравнение теплопроводности

На примере задачи кондуктивной теплопередачи в твердом теле [18] рассмотрим вывод дифференциального уравнения теплопроводности в частных производных [19].

Пусть дан стержень (или любое другое тело, в котором теплопередача по одной из координат является определяющей для исследуемого процесса, теплопередачей же по двум другим координатам можно пренебречь) длиной l . Границы стержня имеют координаты $x = 0$, $x = l$. Обозначим через S площадь сечения стержня с плоскости, перпендикулярной оси x . Будем полагать S настолько малой, что все точки одного сечения имеют идентичную температуру. Обозначим $T = T(x, t)$ температуру точек в сечении стержня с координатой x в момент времени t . Будем считать, что стержень теплоизолирован вдоль боковой поверхности, а внутри стержня нет источников или стоков тепла.

Рассмотрим элементы стержня между двумя соседними сечениями с координатами x и $x+dx$ (рис. 4.1).

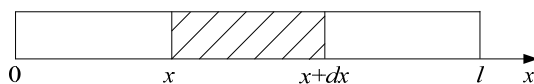


Рис. 4.1. Элемент стержня

Найдем количество тепла dQ , которое аккумулируется выделенным элементом за время dt .

Согласно закону Фурье интенсивность $q(x, t)$ теплового потока в сечении x :

$$q(x, t) = -\lambda(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x},$$

где $\lambda(x)$ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К).

В этом выражении знак минус означает, что тепло распространяется из области с большей температурой в область с меньшей температурой, т.к. градиент температуры $\partial T/\partial x$ характеризует направление роста темпе-

ратуры.

Через левое сечение к элементу стержня (рис. 4.1) за время dt будет подведено количество тепла:

$$dQ_1 = -\lambda(x)S \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dt.$$

Через правое сечение от выделенного элемента стержня вовне за время dt отводится количество тепла:

$$dQ_2 = -\lambda(x+dx)S \frac{\partial T(x+dx,t)}{\partial x} dt.$$

Для преобразования последнего выражения воспользуемся формулой Тейлора, согласно которой функцию $p(x+dx)$ можно представить в виде:

$$p(x+dx) = p(x) + \frac{\partial p(x)}{\partial x} \frac{dx}{1!} + \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Представляя $\lambda(x+dx)$ и $\frac{\partial T(x+dx,t)}{\partial x}$ по формуле Тейлора и отбрасывая бесконечно малые слагаемые порядка $(dx)^2$, получим:

$$\begin{aligned} \lambda(x+dx) &= \lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx, \\ \frac{\partial T(x+dx,t)}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx, \\ dQ_2 &= -S \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx + \lambda' \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) dt. \end{aligned}$$

Здесь λ , λ' , $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ вычисляются на границе x .

Количество тепла, аккумулированное элементом стержня за время dt :

$$dQ = dQ_1 - dQ_2 = S \left(\lambda(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \lambda'(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) dx dt. \quad (19)$$

Выражение в скобках представляет производную от произведения функций $\lambda(x)$ и $\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$, тогда получим:

$$dQ = S \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) dx dt. \quad (20)$$

С другой стороны, в результате притока энергии температура в элементе стержня за время dt повышается на величину:

$$T(x,t+dt) - T(x,t) \approx T(x,t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dt + \dots - T(x,t) \approx \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dt.$$

Количество тепла, аккумулированное элементом стержня за время dt , также можно представить в виде:

$$dQ = \rho C S dx \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dt, \quad (21)$$

где ρ – плотность материала стержня, кг/м³; C – теплоемкость, Дж/(кг·К); Sdx – объем элемента стержня, м³.

Приравняв правые части выражений (20) и (21), получим:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности в частных производных является уравнением параболического типа.

Если стержень однороден, то значения ρ , C , λ постоянны. Уравнение теплопроводности можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где $a = \frac{\lambda}{\rho C}$ – коэффициент температуропроводности, м²/с.

Если в стержне происходит выделение или поглощение тепла, например, вследствие химических реакций, тогда количество тепла, аккумулированное элементом стержня за время dt за счет источника тепла, будет равно:

$$dQ_0 = S dx F(x, t) dt, \quad (22)$$

где $F(x, t)$ – плотность тепловыделения внутри стержня, Вт/м³.

Суммируя выражения (20) и (22) и приравнявая эту сумму к выражению (21), получим нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности в частных производных, учитывающее тепловыделение за счет внутренних источников:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + F(x, t).$$

Для однородного стержня это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{F(x, t)}{\rho C}. \quad (23)$$

Аналогично выводятся уравнения, описывающие теплопередачу в двумерных и трехмерных задачах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{F(x, y, t)}{\rho C}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{F(x, y, z, t)}{\rho C}. \end{aligned}$$

В операторной форме записи последнее уравнение можно представить в виде:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(x, y, z) \operatorname{grad} T) + F(x, y, z, t).$$

При теплопередаче в движущейся жидкости или газе уравнение теплопроводности с учетом конвективного теплообмена принимает вид [20]:

$$\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V^{(x)} \frac{\partial T}{\partial x} + V^{(y)} \frac{\partial T}{\partial y} + V^{(z)} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + F(x, y, z, t),$$

где $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ – проекции вектора скорости жидкости или газа на соответствующие оси декартовой системы координат, м/с.

Слагаемые $V^{(x)} \frac{\partial T}{\partial x}$, $V^{(y)} \frac{\partial T}{\partial y}$, $V^{(z)} \frac{\partial T}{\partial z}$ характеризуют перенос тепла жидкостью или газом при движении среды.

В случае идеальной несжимаемой жидкости проекции скоростей $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial V^{(x)}}{\partial t} + V^{(x)} \frac{\partial V^{(x)}}{\partial x} + V^{(y)} \frac{\partial V^{(x)}}{\partial y} + V^{(z)} \frac{\partial V^{(x)}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ \rho \left(\frac{\partial V^{(y)}}{\partial t} + V^{(x)} \frac{\partial V^{(y)}}{\partial x} + V^{(y)} \frac{\partial V^{(y)}}{\partial y} + V^{(z)} \frac{\partial V^{(y)}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y}, \\ \rho \left(\frac{\partial V^{(z)}}{\partial t} + V^{(x)} \frac{\partial V^{(z)}}{\partial x} + V^{(y)} \frac{\partial V^{(z)}}{\partial y} + V^{(z)} \frac{\partial V^{(z)}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z}, \\ \frac{\partial V^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(z)}}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

где ρ – плотность жидкости кг/м³; $P(x, y, z, t)$ – гидродинамическое давление, Н/м².

Первое уравнение (векторное) представляет собой второй закон динамики и выражает закон движения жидкости под действием сил давления, второе – уравнение неразрывности (сплошности) среды.

При решении задачи теплопередачи в цилиндрической (r, φ) и сферической (r, Θ, φ) системах координат уравнение теплопроводности имеет вид [21]:

$$\begin{aligned} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\ \rho C \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial^2 T}{r^2 \sin^2 \Theta \partial \varphi^2} \right). \end{aligned}$$

Изображение радиус-вектора в цилиндрической и сферической системах координат приведено на рисунке 4.2.

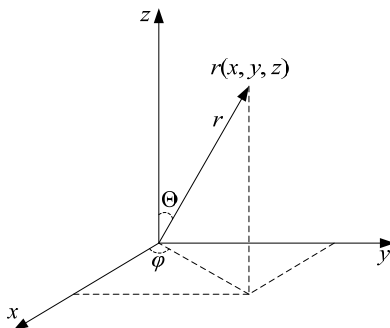


Рис. 4.2. Радиус-вектор

Для перехода от декартовой к цилиндрической и сферической системам координат использованы выражения:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = r \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \Theta.$$

4.2. Краевые условия

Уравнение теплопроводности, например (23), описывает бесконечное число вариантов развития процесса кондуктивной теплопередачи. Условия однозначности (геометрические, физические, начальные, граничные) позволяют из множества вариантов выделить один и дать его полное математическое описание.

Геометрические условия определяют форму и размеры тела, в котором протекает изучаемый процесс. *Физические условия* определяют теплофизические характеристики материала λ , ρ , C . *Временные (начальные) условия* характеризуют распределение температуры в теле в начальный момент времени:

$$t = 0: T = f(x, y, z).$$

При равномерном распределении температуры в теле начальное условие упрощается: $t = 0: T = T_0 = \text{const}$. *Граничные условия* определяют особенности протекания процесса на поверхности тела и могут быть заданы несколькими способами в зависимости от условий теплопередачи на границе.

Граничные условия первого рода – задается распределение температу-

ры на поверхности (или границе) тела для каждого момента времени:

$$T = T_w(x, y, z, t),$$

где T_w – температура на поверхности тела, К. Как правило, ее значение постоянно $T_w = \text{const}$.

Граничные условия второго рода – задается значение лучистого теплового потока для каждой точки поверхности (или границы) тела в любой момент времени:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right)_w = q_w(x, y, z, t),$$

где $\bar{n}$ – нормаль к поверхности тела. Как правило, используется условие $q_w = \text{const}$.

Граничные условия третьего рода – задается взаимосвязь между потоком тепла за счет теплопроводности от твердой стенки и тепловым потоком из окружающей среды за счет конвективного потока тепла:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right)_w = \alpha(T_w - T_e),$$

где α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К); T_e – температура источника, К.

Граничные условия четвертого рода характеризуют условия взаимодействия на границе между телами с отличающимися теплофизическими характеристиками. По обе стороны от границы раздела задаются условия равенства тепловых потоков и температур:

$$\begin{cases} -\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial \bar{n}} \right)_b = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial \bar{n}} \right)_b, \\ T_1(x_b, y_b, z_b, t) = T_2(x_b, y_b, z_b, t), \end{cases}$$

где x_b, y_b, z_b – координаты границы контакта тел.

4.3. Методы численного решения дифференциальных уравнений в частных производных

На практике численное решение дифференциальных уравнений в частных производных (в том числе теплопроводности), как правило, реализуется в рамках одного из методов [22–33]:

- конечных разностей;
- конечных элементов;
- конечных объемов.

Метод конечных разностей (МКР) достаточно подробно рассмотрен в предыдущей главе. Тело, в котором исследуется процесс теплопередачи,

представляют в виде совокупности узлов. В дифференциальном уравнении производные аппроксимируются в виде конечноразностных аналогов. Полученная система линейных алгебраических уравнений совместно с разностными аналогами граничных условий решается численными методами с помощью ЭВМ. Достоинствами МКР являются высокая эффективность и простота реализации, а также наглядность процедуры дискретизации области решения, дающая возможность построения схем относительно высокого порядка точности. Эти достоинства реализуются лишь при использовании достаточно регулярной пространственной сетки с плавно меняющимися размерами ячеек. Как следствие, подавляющее большинство приложений МКР ограничено случаями сравнительно простых по геометрии расчетных областей.

Метод конечных элементов (МКЭ) основан на идеях дискретизации исследуемого объекта на конечное множество элементов и кусочно-элементной аппроксимации исследуемых функций. Конечные элементы могут иметь различную форму и различные размеры. В результате дискретизации объекта создается сетка из границ элементов. Пересечения этих границ образуют узлы. На границах и внутри элементов могут быть созданы дополнительные узловые точки. Совокупность всех конечных элементов и узлов является основой конечно-элементной модели. В каждом из элементов произвольно выбирается вид аппроксимирующей функции. Вне своего элемента аппроксимирующая функция равна нулю. Значения функций в узлах (на границах элементов) являются решением задачи и заранее неизвестны. Коэффициенты аппроксимирующих функций ищутся из условия равенства значения соседних функций на границах между элементами (в узлах). Затем эти коэффициенты выражаются через значения функций в узлах элементов. Составляется система линейных алгебраических уравнений. Количество уравнений равно числу неизвестных значений в узлах, на которых ищется решение исходной системы, прямо пропорционально количеству элементов и ограничивается возможностями ЭВМ. Так как каждый из элементов связан с ограниченным числом соседних, система линейных алгебраических уравнений имеет разреженный вид, что достаточно существенно упрощает ее решение. Метод конечных элементов сложнее в реализации по сравнению с методом конечных разностей. Однако МКЭ имеет преимущества, проявляющиеся при решении реальных задач:

- произвольная форма области исследования – криволинейная область может быть аппроксимирована с помощью прямолинейных элементов или описана точно с помощью криволинейных элементов;

- переменные размеры элементов – можно укрупнить или измельчить сеть разбиения области на элементы, если в этом есть необходимость.

Метод конечных объемов (МКО) основан на интегральной формулировке законов сохранения энергии, импульса, массы и др. Балансовые соотношения составляются для небольшого контрольного объема. Их дискретный аналог получается суммированием по всем граням выделенного объема потоков энергии, импульса, массы и т.д., вычисленных по каким-либо квадратурным формулам. Т.к. интегральная формулировка законов сохранения не накладывает ограничений на форму контрольного объема, то МКО пригоден для дискретизации уравнений теплопроводности как на структурированных, так и на неструктурированных сетках с различной формой ячеек, что решает проблему сложной геометрии расчетной области. К недостаткам метода конечных объемов следует отнести сложность повышения порядка аппроксимации, особенно в случае неравномерной сетки. Однако МКО имеет преимущества по сравнению с МКР:

- разностная схема заведомо консервативна;
- результирующие конечно-разностные формулы более просты и наглядны;
- меньше геометрических величин нужно хранить в памяти ЭВМ.

4.4. Пример численного решения задачи теплопроводности

В качестве примера применения МКР рассмотрим численное решение линейного уравнения теплопроводности с краевыми условиями. Анализируется теплопередача через плоскую бесконечную пластину (рис. 4.3). На левой границе поддерживается постоянная температура T_l , на правой границе – T_r . Начальная температура равна T_0 , источники тепловыделения в пластине отсутствуют.

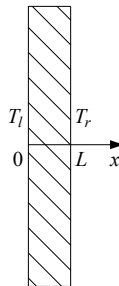


Рис. 4.3. Схема области решения задачи

В рассматриваемых условиях температура будет изменяться только в направлении, перпендикулярном границе пластины. Если ось x направить, как показано на рисунке 4.3, то температуру в направлении y и z можно считать постоянной. Также предположим, что теплофизические характеристики материала не зависят от температуры.

Уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L. \quad (24)$$

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} t=0: T=T_0, \quad 0 \leq x \leq L; \\ x=0: T=T_l, \quad t>0; \\ x=L: T=T_r, \quad t>0. \end{aligned} \quad (25)$$

Зададим геометрические и физические условия однозначности. Толщина пластины $L = 0,1$ м, теплофизические характеристики материала (сталь) $\lambda = 46$ Вт/(м·К); $\rho = 7800$ кг/м³; $C = 460$ Дж/(кг·К). Начальная температура $T_0 = 300$ К, температура на левой границе $T_l = 600$ К, температура на правой границе $T_r = 400$ К. Необходимо определить распределение температуры по толщине пластины через 60 с после начала процесса нагрева.

Сформулированную задачу будем решать методом конечных разностей на равномерной пространственной сетке (рис. 3.1). В уравнении (24) заменим дифференциальные операторы на их конечно-разностные аналоги. Возможно применение явной и неявной разностных схем (рис. 4.4).

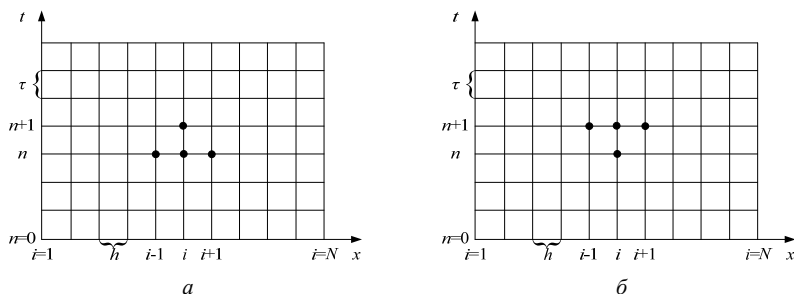


Рис. 4.4. Шаблоны явной (а) и неявной (б) четырехточечных разностных схем

Явными схемами называются такие разностные схемы для эволюционных уравнений, когда данные на следующем слое по времени находятся непосредственно из данных на предыдущем слое без решения алгебраиче-

ских систем уравнений. В такой схеме явно определяется поле температуры и не нужно решать систему уравнений для определения прогоночных коэффициентов α_i и β_i (15). Если же на верхнем временном слое для определения значений сеточной функции необходимо решать систему алгебраических уравнений, то схема называется *неявной*.

Явная разностная схема является условно устойчивой и требует специальных мероприятий по оценке возможности ее использования, например выбора шага интегрирования по времени. Неявная же схема всегда является устойчивой.

Заменим дифференциальные операторы в (24) на их конечно-разностные аналоги.

Явная схема		Неявная схема
	$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau},$	
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2},$		$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2},$

В результате аппроксимации частных производных соответствующими конечными разностями получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$\rho C \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} \right),$		$\rho C \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right),$
$i = 2, \dots, N-1, n \geq 0.$		$i = 2, \dots, N-1, n \geq 0.$

Отличие явной схемы от неявной заключается в аппроксимации диффузионного слагаемого, а именно, во временном слое, на котором рассматривается неизвестное поле температуры.

Для определения неизвестного поля температуры по явной схеме не требуется решать никакой системы уравнений для α_i и β_i (15). Решение находится из уравнения:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\lambda \tau}{\rho C} \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} \right), \quad i=2, \dots, N-1, n \geq 0$$

и разностных аналогов краевых условий:

$$T_i^0 = T_0, \quad i=2, \dots, N-1;$$

$$T_1^n = T_l, \quad n \geq 0;$$

$$T_N^n = T_r, \quad n \geq 0.$$

В рамках неявной разностной схемы полученную систему уравнений

$$\rho C \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right), \quad i=2, \dots, N-1, n \geq 0$$

можно свести к наиболее общему виду:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i-1}^{n+1} = F_i, \quad i=2, \dots, N-1, \quad (26)$$

где $A_i = C_i = \frac{\lambda}{h^2}$, $B_i = \frac{2\lambda}{h^2} + \frac{\rho C}{\tau}$, $F_i = -\frac{\rho C}{\tau} T_i^n$.

Уравнение (26) решается методом прогонки.

Положим, что существуют такие наборы чисел α_i и β_i ($i = 2, \dots, N-1$), при которых

$$T_i^{n+1} = \alpha_i T_{i+1}^{n+1} + \beta_i, \quad (27)$$

т.е. трехточечное уравнение второго порядка (26) преобразуется в двухточечное уравнение первого порядка (27). Уменьшим в связи (27) индекс на единицу и полученное выражение $T_{i-1}^{n+1} = \alpha_{i-1} T_i^{n+1} + \beta_{i-1}$ подставим в уравнение (26):

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i \alpha_{i-1} T_i^{n+1} + C_i \beta_{i-1} = F_i,$$

откуда:

$$T_i^{n+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}} T_{i+1}^{n+1} + \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}.$$

Полученное выражение имеет вид (27) и будет с ним совпадать, если при всех $i = 2, \dots, N-1$ выполняются соотношения:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}. \quad (28)$$

Для определения α_i и β_i по выражениям (28) необходима информация о значениях α_1 и β_1 , которые находятся из левого граничного условия.

Далее по формулам (27) последовательно находятся значения T_{N-1}^{n+1} , T_{N-2}^{n+1} , ..., T_2^{n+1} , при условии, что T_N^{n+1} найдено из правого граничного условия.

Определим прогоночные коэффициенты:

при $x = 0$: $T = T_l$, тогда $T_1^{n+1} = \alpha_1 T_2^{n+1} + \beta_1 = T_l$, откуда для выполнения равенства $\alpha_1 T_2^{n+1} + \beta_1 = T_l$: $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = T_l$,

при $x = L$: $T = T_r$, тогда $T_N^{n+1} = T_r$.

Прогоночные коэффициенты при $i = 2, \dots, N-1$ вычисляются по выражениям (28).

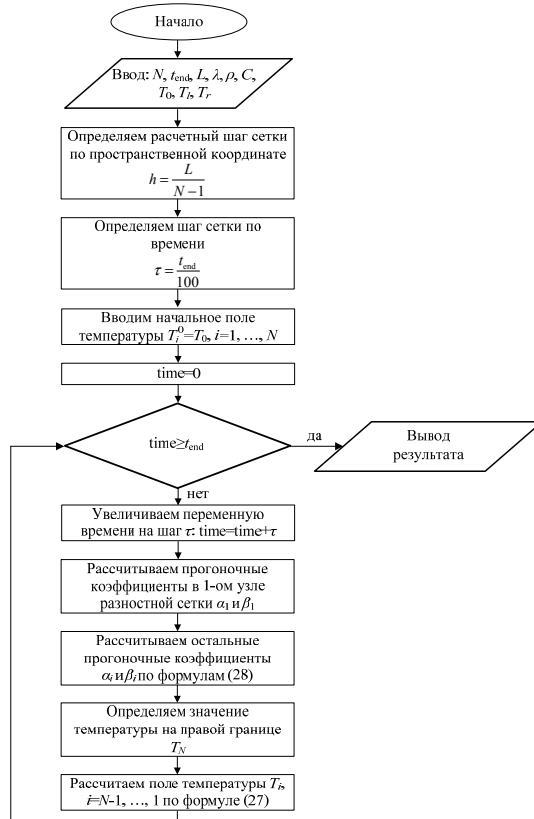
Разностные соотношения, аппроксимирующие дифференциальную задачу (24) и (25), имеют вид:

$$\rho C \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right), \quad i=2, \dots, N-1, \quad n \geq 0; \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 T_i^0 &= T_0, i=2, \dots, N-1; \\
 T_1^n &= T_l, n>0; \\
 T_N^n &= T_r, n>0.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Аппроксимация дифференциальной задачи (24), (25) конечно-разностной (29), (30) выполнена с первым порядком точности по времени t и вторым по пространственной координате h . При этом неявная разностная схема является абсолютно устойчивой, т.е. можно проводить интегрирование краевой задачи (24), (25) с любым разностным шагом по времени. Шаг по времени выбирается таким образом, чтобы весь интервал времени разбивался хотя бы на 10 шагов, а при дроблении шага пополам полученные результаты отличались не более чем на 0,1–1 %.

Блок-схема алгоритма численного решения рассматриваемой задачи:



Листинг программы численного решения рассматриваемой задачи (на языке программирования MATLAB).

```
clc; clear all;
```

```
%Ввод данных
```

```
Tl=600; %Температура на левой границе
```

```
Tr=400; %Температура на правой границе
```

```
To=300; %Начальная температура
```

```
L=0.1; %Толщина пластины
```

```
lm=46; %Теплопроводность материала
```

```
p=7800; %Плотность материала
```

```
c=460; %Теплоемкость материала
```

```
tk=60; %Время расчета
```

```
N=100; % Количество узлов пространственной разностной сетки
```

```
%Характеристика внутренних переменных для MATLAB
```

```
A = zeros(100);
```

```
B = zeros(100);
```

```
C = zeros(100);
```

```
F = zeros(100);
```

```
T = zeros(100);
```

```
a = zeros(100);
```

```
b = zeros(100);
```

```
x = zeros(100);
```

```
%Решение
```

```
%Шаг разностной сетки по пространственной координате
```

```
h=L/(N-1);
```

```
%Шаг сетки по времени
```

```
dt=tk/100;
```

```
%Поле температуры в начальный момент времени
```

```
for i=2:N-1
```

```
    T(i)=To;
```

```
end;
```

```
%Температура на левой границе
```

```
T(1)=Tl;
```

```
%Температура на правой границе
```

```
T(N)=Tr;
```

%Начало отсчета времени

t=0;

%Цикл с предусловием, прямая прогонка

while t<=tk

 %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого граничного условия

 a(1)=0;

 b(1)=Γ1;

 %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям (28)

 for i=2:N-1

 %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей

 A(i)=lm/(h^2);

 B(i)=2*lm/(h^2)+p*c/dt;

 C(i)=lm/(h^2);

 F(i)=-p*c*T(i)/dt;

 %Прогоночные коэффициенты

 a(i)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1));

 b(i)=(C(i)*b(i-1)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1));

 end;

 %Текущая координата

 x(N)=L;

 i=N-1;

 %Обратная прогонка

 while i>=1

 T(i)=a(i)*T(i+1)+b(i);

 x(i)=x(i+1)-h;

 i=i-1;

 end;

 %Счетчик по времени

 t=t+dt;

end;

%Вывод графика

plot(x(1:N),T(1:N));

Результаты расчета приведены на рисунке 4.5.

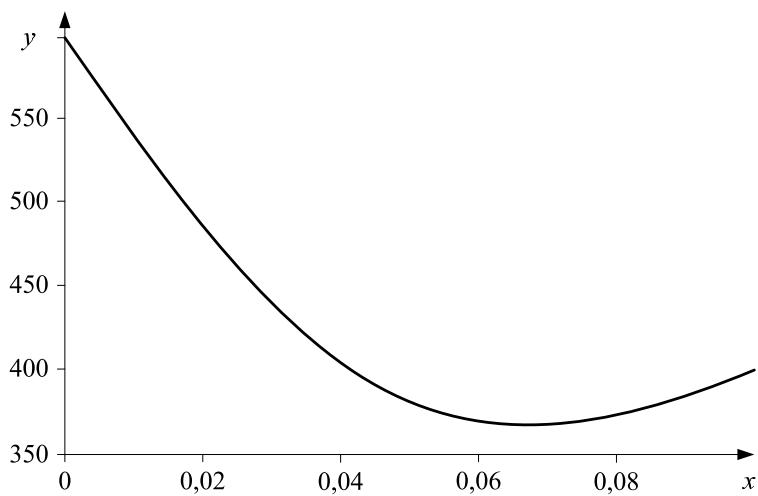


Рис. 4.5. Распределение температуры по толщине пластины при $t = 60$ с

ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

5.1. Прогрев двухслойной металлической пластины при постоянных значениях температуры на границах

Требуется определить поле температуры в двухслойной металлической пластине (рис. 5.1) через 25, 150, 500 секунд. Толщина пластины $L = 0,3$ м (толщина каждого слоя $L/2$). Теплофизические характеристики материалов: сталь – $\lambda_1 = 46$ Вт/(м·К), $\rho_1 = 7800$ кг/м³, $C_1 = 460$ Дж/(кг·К); медь – $\lambda_2 = 384$ Вт/(м·К), $\rho_2 = 8800$ кг/м³, $C_2 = 381$ Дж/(кг·К). Начальная температура $T_0 = 300$ К. На границе $x=0$ поддерживается постоянная температура $T_l = 400$ К, на границе $x = L - T_r = 350$ К.

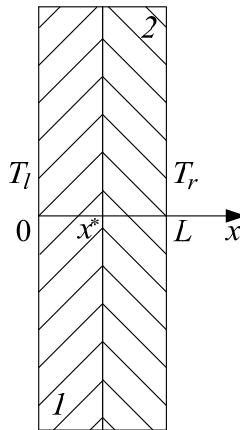


Рис. 5.1. Схема области решения задачи

Математическая модель исследуемого процесса представлена системой одномерных линейных уравнений теплопроводности с начальными и граничными условиями I и IV рода.

Уравнения теплопроводности для материалов пластины:

$$\begin{aligned}\rho_1 C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, 0 < x < x^*; \\ \rho_2 C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, x^* < x < L.\end{aligned}$$

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned}t=0: T &= T_0, 0 \leq x \leq L; \\ x=0: T &= T_l, t > 0; \\ x=x^*: -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} &= -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}, T_1 = T_2, t > 0; \\ x=L: T &= T_r, t > 0.\end{aligned}$$

Граничное условие IV рода на границе контакта пластин из разных металлов используются для определения прогоночных коэффициентов в рамках метода конечных разностей в узле разностной пространственной сетки, соответствующем $x=x^*$, при использовании неявной разностной схемы.

Алгоритм решения краевой задачи заключается в следующем. Проводим аппроксимацию дифференциального уравнения конечными разностями, получаем систему линейных алгебраических уравнений вида (29), которую решаем методом прогонки. В области $0 < x < x^*$ при нахождении прогоночных коэффициентов используем теплофизические характеристики стальной пластины λ_1, ρ_1, C_1 , при $x^* < x < L$ – медной пластины λ_2, ρ_2, C_2 . В точке $x=x^*$ при нахождении прогоночных коэффициентов используем граничное условие IV рода.

Выведем прогоночные коэффициенты для узла разностной сетки (рис. 5.2), соответствующего границе контакта двух материалов, согласно граничному условию $-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}, T_1 = T_2$.

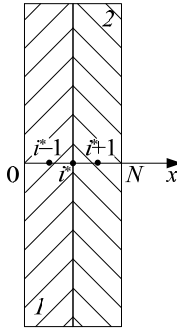


Рис. 5.2. Шаблон разностной схемы

Рассмотрим аппроксимацию первого порядка относительно шага по пространственной координате. При этом, принимая во внимание, что при $i < i^*$ $T = T_1$, а при $i > i^*$ $T = T_2$ исключим в записи индексы, характеризующие среду. Получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} T_{1,i^*} = T_{2,i^*}, \\ -\lambda_1 \frac{T_{1,i^*} - T_{i^*-1}}{h} = -\lambda_2 \frac{T_{i^*+1} - T_{2,i^*}}{h}. \end{cases} \quad (31)$$

Введем обозначение $T_{1,i^*} = T_{2,i^*} \equiv T_{i^*}$.

Используя прогоночное соотношение $T_{i^*-1} = \alpha_{i^*-1} T_{i^*} + \beta_{i^*-1}$ из второго равенства для граничного условия (31) получим:

$$T_{i^*} - \alpha_{i^*-1} T_{i^*} - \beta_{i^*-1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} T_{i^*+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} T_{i^*}$$

или

$$T_{i^*} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1(1 - \alpha_{i^*-1})} T_{i^*+1} + \frac{\lambda_1 \beta_{i^*-1}}{\lambda_2 + \lambda_1(1 - \alpha_{i^*-1})}.$$

Прогоночные коэффициенты для узла разностной сетки, соответствующего границе контакта двух материалов:

$$\begin{cases} \alpha_{i^*} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1(1 - \alpha_{i^*-1})}; \\ \beta_{i^*} = \frac{\lambda_1 \beta_{i^*-1}}{\lambda_2 + \lambda_1(1 - \alpha_{i^*-1})}. \end{cases} \quad (32)$$

В случае аппроксимации второго порядка относительно шага по пространственной координате:

$$\begin{cases} \alpha_{i^*} = \frac{2a_1 a_2 \tau \lambda_2}{2a_1 a_2 \tau (\lambda_2 + \lambda_1 (1 - \alpha_{i^*-1})) + h^2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1)}; \\ \beta_{i^*} = \frac{2a_1 a_2 \tau \lambda_1 \beta_{i^*-1} + h^2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) T_{i^*}^n}{2a_1 a_2 \tau (\lambda_2 + \lambda_1 (1 - \alpha_{i^*-1})) + h^2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1)}. \end{cases} \quad (33)$$

Здесь a – коэффициент температуропроводности материала, $\text{м}^2/\text{с}$.

При реализации метода прогонки сначала находят прогоночные коэффициенты по выражениям (28) при значениях теплофизических характеристик, соответствующих первому материалу, затем на границе i^* используют соотношения (32) или (33), далее определяют прогоночные коэффициенты по выражениям (28) при значениях теплофизических характеристик, соответствующих второму материалу.

Листинг программы численного решения рассматриваемой задачи (на языке программирования MATLAB).

```
clc; clear all;
```

```
%Ввод данных
```

```
%Теплофизические характеристики стальной пластины
```

```
lm1=46;
```

```
p1=7800;
```

```
cp1=460;
```

```
%Теплофизические характеристики медной пластины
```

```
lm2=384;
```

```
p2=8800;
```

```
cp2=381;
```

```
To=300; %Начальная температура пластины
```

```
Tl=400; %Температура на левой границе
```

```
Tr=350; %Температура на правой границе
```

```
L=0.3; %Толщина двухслойной пластины
```

```
tk=25; %Время расчета
```

```
N1=10; %Количество пространственных узлов в стальной пластине
```

```
N2=10; %Количество пространственных узлов в медной пластине
```

```
%Характеристика внутренних переменных для MATLAB
```

```
A = zeros(20);
```

```
B = zeros(20);
```

```
C = zeros(20);
```

```
F = zeros(20);
```

```

T = zeros(20);
a = zeros(20);
b = zeros(20);
x = zeros(20);

%Решение
%Общее число узлов в пластине
N=N1+N2-1;

%Шаг разностной сетки по пространственной координате
h=L/(N-1);

%Шаг сетки по времени
dt=tk/100;

%Поле температуры в начальный момент времени
for i=1:N
    T(i)=To;
end;

%Начало отсчета времени
t=0;

%Цикл с предусловием, прямая прогонка
while t<=tk
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого граничного
    условия
    a(1)=0;
    b(1)=Tl;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов в стальной пла-
    стине по выражениям (28)
    for i=2:N1-1
        A(i)=lm1/(h^2);
        B(i)=2*lm1/(h^2)+p1*cp1/dt;
        C(i)=lm1/(h^2);
        F(i)=-p1*cp1*T(i)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i)=(A(i)/(B(i)-a(i-1)*C(i)));
        b(i)=(C(i)*b(i-1)-F(i))/(B(i)-a(i-1)*C(i));
    end;

    %Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода по

```

выражениям (32)

$$a(N1)=lm2/(lm2+lm1*(1-a(N1-1)));$$
$$b(N1)=lm1*b(N1-1)/(lm2+lm1*(1-a(N1-1)));$$

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов в медной пластине по выражениям (28)

for i=N1+1:N-1

$$A(i)=lm2/(h^2);$$

$$B(i)=2*lm2/(h^2)+p2*cp2/dt;$$

$$C(i)=lm2/(h^2);$$

$$F(i)=-p2*cp2*T(i)/dt;$$

%Прогоночные коэффициенты

$$a(i)=A(i)/(B(i)-a(i-1)*C(i));$$

$$b(i)=(C(i)*b(i-1)-F(i))/(B(i)-a(i-1)*C(i));$$

end;

%Координата и значение температуры на правой границе

$$T(N)=Tr;$$

$$x(N)=L;$$

%Обратная прогонка

while i>=1

$$T(i)=a(i)*T(i+1)+b(i);$$

$$x(i)=x(i+1)-h;$$

$$i=i-1;$$

end;

%Счетчик по времени

$$t=t+dt;$$

end;

%Вывод графика

$$\text{plot}(x(1:N),T(1:N));$$

Результаты расчета приведены на рисунке 5.3.

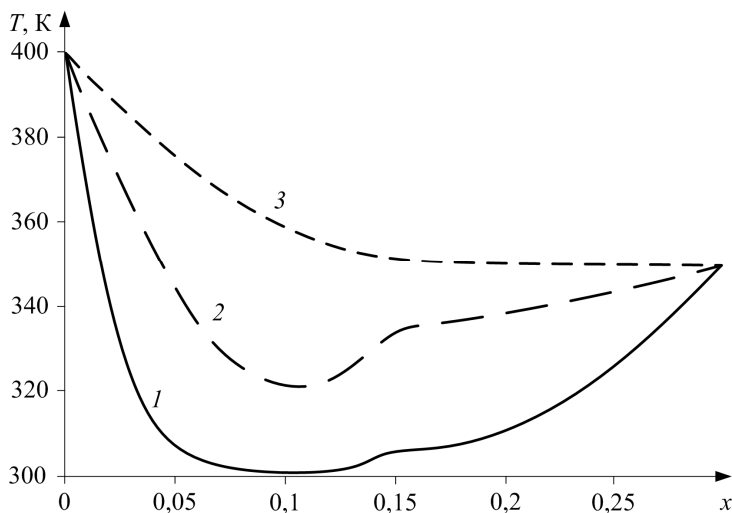


Рис. 5.3. Распределения температуры по толщине пластины:
 $1 - t = 25 \text{ с}$; $2 - t = 150 \text{ с}$; $3 - t = 500 \text{ с}$

5.2. Инертный прогрев пластины изоляционного материала с включениями металлических конструкционных элементов при усреднении значений теплофизических характеристик материала

Требуется определить поле температуры в пластине изоляционного полимерного материала (на основе полиэтилена) с включениями металлических (сталь) конструкционных элементов (рис. 5.4) через 1500 секунд. Размеры пластины $x_L = 0,1 \text{ м}$, $y_H = 0,1 \text{ м}$; размеры включений $x_l = 0,02 \text{ м}$, $y_h = 0,02 \text{ м}$. В области решения задачи объемная концентрация полимера 85%, металла – 15%. Теплофизические характеристики материалов: полиэтилен – $\lambda_1 = 0,14 \text{ Вт/(м·К)}$, $\rho_1 = 1333 \text{ кг/м}^3$, $C_1 = 1257 \text{ Дж/(кг·К)}$; сталь – $\lambda_2 = 60 \text{ Вт/(м·К)}$, $\rho_2 = 7800 \text{ кг/м}^3$, $C_2 = 460 \text{ Дж/(кг·К)}$. Начальная температура $T_0 = 300 \text{ К}$. На горизонтальных границах области решения поддерживаются постоянные температуры $T_l = 400 \text{ К}$ при $y = 0$, $T_r = 250 \text{ К}$ при $y = y_H$. Вертикальные границы являются адиабатическими.

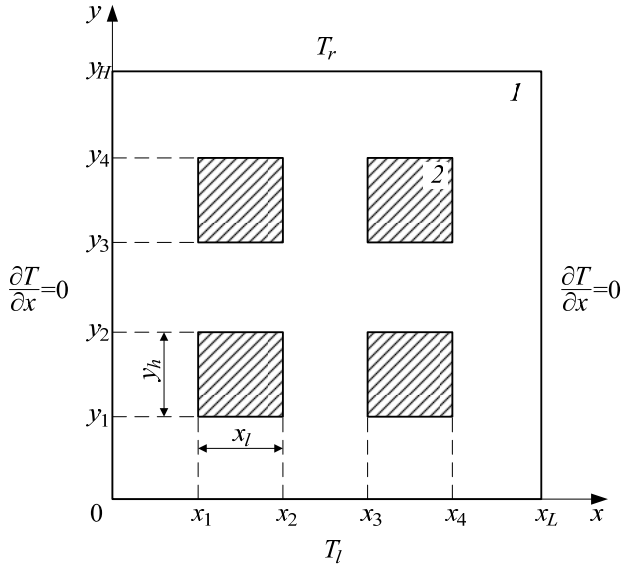


Рис. 5.4. Схема области решения задачи: 1 – изоляционный полимерный материал;
2 – металлические конструкционные элементы; размеры:

$$x_1=0,02 \text{ м}, x_2=0,04 \text{ м}, x_3=0,06 \text{ м}, x_4=0,08 \text{ м}, \\ y_1=0,02 \text{ м}, y_2=0,04 \text{ м}, y_3=0,06 \text{ м}, y_4=0,08 \text{ м}$$

Математическая модель исследуемого процесса представлена двумерным линейным уравнением теплопроводности с начальными и граничными условиями I и IV рода.

Уравнения теплопроводности для пластины полимерного материала и металлических включений:

при $0 < x < x_L$, $0 < y < y_1$; $0 < x < x_1$, $y_1 < y < y_2$; $x_2 < x < x_3$, $y_1 < y < y_2$; $x_4 < x < x_L$, $y_1 < y < y_2$;
 $0 < x < x_L$, $y_2 < y < y_3$; $0 < x < x_1$, $y_3 < y < y_4$; $x_2 < x < x_3$, $y_3 < y < y_4$; $x_4 < x < x_L$, $y_3 < y < y_4$; $0 < x < x_L$,
 $y_4 < y < y_H$.

$$\rho_1 C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right); \quad (34)$$

при $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$; $x_3 < x < x_4$, $y_1 < y < y_2$; $x_1 < x < x_2$, $y_3 < y < y_4$; $x_3 < x < x_4$, $y_3 < y < y_4$:

$$\rho_2 C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right). \quad (35)$$

Начальные условия:

$$t=0: T=T_0, 0 < x < x_L, 0 < y < y_H; \quad (36)$$

Граничные условия:

$$x=0, 0<y<y_H: \frac{\partial T}{\partial x} = 0, t>0;$$

$$x=x_L, 0<y<y_H: \frac{\partial T}{\partial x} = 0, t>0;$$

$$y=0, 0<x<x_L: T=T_b, t>0;$$

$$y=y_H, 0<x<x_L: T=T_r, t>0;$$

$$x=x_1, y_1<y<y_2; x=x_1, y_3<y<y_4;$$

$$x=x_2, y_1<y<y_2; x=x_2, y_3<y<y_4;$$

$$x=x_3, y_1<y<y_2; x=x_3, y_3<y<y_4;$$

$$x=x_4, y_1<y<y_2; x=x_4, y_3<y<y_4;$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}, T_1=T_2, t>0;$$

(37)

$$y=y_1, x_1<x<x_2; y=y_1, x_3<x<x_4;$$

$$y=y_2, x_1<x<x_2; y=y_2, x_3<x<x_4;$$

$$y=y_3, x_1<x<x_2; y=y_3, x_3<x<x_4;$$

$$y=y_4, x_1<x<x_2; y=y_4, x_3<x<x_4;$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y}, T_1=T_2, t>0.$$

Сформулированную задачу можно решить в рамках нескольких подходов. Достаточно часто на практике используют подход, основанный на предположение о возможности интерпретации неоднородной структуры материала (из-за включений, например, металла) как среды с некими «эффективными» (усредненными) значениями теплофизических характеристик. Последние могут быть определены из простых выражений, приведенных ниже. Другой подход заключается в учете реальной гетерогенной структуры материала.

Известно достаточно большое число теоретических и экспериментальных исследований эффективных теплофизических характеристик структурно-неоднородных материалов [34–58]. Как правило, значения плотности и удельной теплоемкости смеси твердых компонентов рассчитываются [37–40] по формулам на основе свойства аддитивности Неймана-Коппа:

$$\rho_e = \rho_c \varphi_c + \rho_d \varphi_d; \quad (38)$$

$$C_e = C_c \mu_c + C_d \mu_d, \quad (39)$$

где индексы e, c, d – эффективное значение, исходное вещество, дисперги-

рованный компонент, φ – объемная концентрация, μ – массовая концентрация.

Согласно теоретическим следствиям [35–37], вычисленные значения ρ_e и C_e для составов в твердом агрегатном состоянии достаточно хорошо коррелируют с результатами экспериментальных исследований по определению соответствующих эффективных теплофизических характеристик, что объясняется достаточно близкими значениями плотностей ($\rho_d/\rho_c \approx 1-5$) и теплоемкостей ($C_d/C_c \approx 1-5$) отдельных компонентов. В свою очередь их теплопроводности, например, для полимера и металла могут отличаться более существенно ($\lambda_d/\lambda_c > 100$). Установление выражения для этого параметра, удовлетворительно описывающего теплопроводность структурно-неоднородного твердого материала в рамках математической модели с усредненными теплофизическими характеристиками, представляет самостоятельную задачу.

В многочисленных работах, например [35–57], приведены выражения для расчета эффективной теплопроводности двухкомпонентных смесей. К таким смесям можно отнести полимерный материал с включениями металла. Широкое практическое применение получили простые формулы, основанные на предположении об аддитивности характеристик компонентов смесей [38–40]:

$$\begin{aligned}\lambda_e &= \lambda_c \mu_c + \lambda_d \mu_d; \\ \lambda_e &= \lambda_c \varphi_c + \lambda_d \varphi_d.\end{aligned}$$

Не менее часто используется выражение [41]:

$$\frac{1}{\lambda_e} = \frac{\varphi_c}{\lambda_c} + \frac{\varphi_d}{\lambda_d}. \quad (40)$$

Основываясь на теории электропроводности Максвелла [42], Беренс [43] предложил общий вид уравнения [44–46] теплопроводности для полимерных композиций, содержащих стеклянные сферы (размер 62–210 мкм) в кубической решетке. Предполагалось, что взаимодействие между включениями пренебрежимо мало, а объемная концентрация включений может варьироваться от 0 до 40%:

$$\lambda_e = \lambda_c \left[\frac{(\lambda_d / \lambda_c + 2) + 2(\lambda_d / \lambda_c - 1)\varphi_d}{(\lambda_d / \lambda_c + 2) - (\lambda_d / \lambda_c - 1)\varphi_d} \right].$$

Бруггеман [47] на основе результатов исследования Лорда Рэлея [48] предложил формулу [49] для вычисления теплопроводности материалов, содержащих случайным образом расположенные в кубической решетке частицы в форме сферы, при учете взаимодействия между соседними час-

тицами:

$$\lambda_e = \frac{1}{4} \left[\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\lambda_c\lambda_d} \right],$$

где $\gamma = (3\varphi_d - 1)\lambda_d + (3\varphi_c - 1)\lambda_c$.

Мередит для условий аналогичных исследованию Бруггемана получил зависимость для гетерогенного материала в следующем виде [50]:

$$\lambda_e = \lambda_c \frac{(2 + 2\gamma\varphi_d)(2 + (2\gamma - 1)\varphi_d)}{(2 - \gamma\varphi_d)(2 - (\gamma + 1)\varphi_d)},$$

где $\gamma = \frac{\lambda_d - \lambda_c}{2\lambda_c + \lambda_d}$.

Сяо [51] установил зависимость теплопроводности смеси от параметров, которые характеризуют пространственное распределение компонентов. В предположении их параболического распределения Ченг и Вахон [44, 46, 52] получили выражение:

$$\frac{1}{\lambda_e} = \frac{1 - B}{\lambda_c} + \frac{1}{B'\sqrt{CC'}} \ln \left[\frac{B' + B\sqrt{CC'}/2}{B' - B\sqrt{CC'}/2} \right],$$

где $B = \sqrt{3\varphi_d/2}$, $C = 4\sqrt{2/3\varphi_d}$, $B' = \sqrt{\lambda_c + B(\lambda_d - \lambda_c)}$, $C' = \sqrt{\lambda_d - \lambda_c}$.

Петерсон и Германс [53] при разработке общей теории диэлектрических постоянных для двухкомпонентной среды установили выражение для электрической проводимости. Аналогичная зависимость для теплопроводности введена авторами [44, 46]:

$$\lambda_e = \lambda_c \left[1 + 3\gamma\varphi_d + 3\gamma^2 \left(1 + \frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma^2}{256} + \dots \right) \varphi_d^2 \right],$$

где $\gamma = \frac{\lambda_d - \lambda_c}{2\lambda_c + \lambda_d}$.

Выражение, полученное Нильсеном [54, 55], основано на модели, разработанной Эйнштейном для вязкости жидкости с включениями сферических частиц, и уравнения Хэлпин–Цайя для расчета модуля упругости композиционных материалов. Нильсен ввел в модель Хэлпин–Цайя переменную ψ , которая учитывает расположение включений в матрице. Параметр A характеризует форму и ориентацию частиц, B – относительную теплопроводность компонентов:

$$\lambda_e = \lambda_c \left[\frac{1 + AB\varphi_d}{1 - B\psi\varphi_d} \right],$$

где $A=1-k_c$, $\psi=1+\frac{1-\varphi_{d\max}}{\varphi_{d\max}^2}\varphi_d$, $B=\frac{(\lambda_d/\lambda_c-1)}{(\lambda_d/\lambda_c+A)}$.

Несмотря на то, что из представленной совокупности выражений одни предложены для случая, когда частицы имеют сферическую форму [45, 47, 48, 50], а другие – когда учитывается несферичность включений [52, 56, 57], эти выражения формально применимы для расчета эффективной теплопроводности металлизированного полимера. В исследованиях Фрика [56], Хэмилтона и Кросса [57] на основе уравнения Максвелла показано, что форма дисперсных включений несущественно влияет на усредненное значение теплопроводности при условии $\lambda_d/\lambda_c > 100$, что выполняется для компонентов рассматриваемой системы (рис. 5.4).

В данном пункте выполним решение задачи (рис. 5.4) в рамках модели однородного полимерного материала с эффективными значениями теплофизических характеристик. В п. 5.3 будет представлено решение этой задачи в рамках математической модели, учитывающей в явном виде структурную неоднородность (включения металла).

Математическая модель примет следующий вид.

Уравнение теплопроводности:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), 0 < x < x_L, 0 < y < y_H. \quad (41)$$

Начальные условия:

$$t=0: T=T_0, 0 < x < x_L, 0 < y < y_H;$$

Граничные условия:

$$x=0, 0 < y < y_H: \frac{\partial T}{\partial x} = 0, t > 0;$$

$$x=x_L, 0 < y < y_H: \frac{\partial T}{\partial x} = 0, t > 0;$$

$$y=0, 0 < x < x_L: T=T_l, t > 0;$$

$$y=y_H, 0 < x < x_L: T=T_r, t > 0.$$

Здесь теплофизические характеристики вычислены с использованием выражений (38)–(40): $\lambda = 0,165 \text{ Вт/(м·К)}$, $\rho = 2303 \text{ кг/м}^3$, $C = 859 \text{ Дж/(кг·К)}$.

Массовая концентрация компонентов:

$$\mu_1 = \frac{\varphi_1 \rho_1}{\varphi_1 \rho_1 + \varphi_2 \rho_2},$$

$$\mu_1 + \mu_2 = 1.$$

Для аппроксимации дифференциального уравнения (41) разностным введем пространственно-временную сетку с координатами:

$$x_i = (i-1)h_x, y_j = (j-1)h_y, t_n = n\tau,$$

где h_x, h_y – шаги сетки по координатам x и y , соответственно; τ – шаг по времени; $i = \overline{1, N_x}$; $j = \overline{1, N_y}$; $n = \overline{0, K}$. Вся расчетная область покрывается сеткой (рис. 5.5).

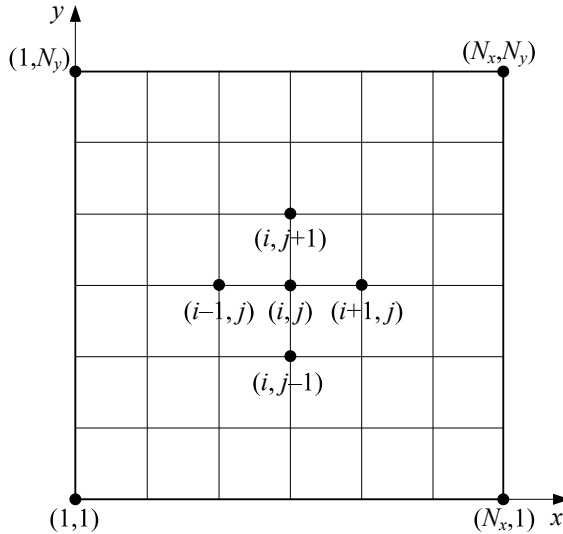


Рис. 5.5. Разностная сетка области решения задачи

Введем обозначение $T(x_i, y_j, t_n) = T_{i,j}^n$. Дискретизацию уравнения теплопроводности (41) будем проводить на основе локально-одномерной схемы А.А. Самарского [17], которая является абсолютно устойчивой и обладает свойством суммарной аппроксимации. Этот подход заключается в том, что шаг по времени реализуется в два этапа. На промежуточном временном шаге проводится дискретизация двумерного уравнения (41) только в направлении оси x , в результате получается одномерное уравнение. В результате его решения устанавливается поле температуры на полшаге по времени. Далее вновь проводится дискретизация уравнения (41), но уже в направлении оси y . Решение полученного одномерного уравнения позволяет определить поле температуры на целом шаге по времени.

В результате дискретизации по осям x и y уравнение (41) преобразуется к системе разностных уравнений вида:

$$\rho C \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} \right), i=2, \dots, N_x-1, n \geq 0; \quad (42)$$

$$\rho C \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right), j=2, \dots, N_y-1, n \geq 0. \quad (43)$$

Уравнения (42), (43) сводятся к стандартному трехдиагональному виду и решаются последовательно методом прогонки. Сначала для всей области решается система уравнений (42), после того как его решение будет найдено, переходят к решению системы уравнений (43).

Рассмотрим решение системы уравнений (42) с адиабатическими граничными условиями методом прогонки. Приведем эту систему уравнений к наиболее общему виду:

$$A_i T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_i T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = F_i, i=2, \dots, N_x-1, \quad (44)$$

где $A_i = C_i = \frac{\lambda}{h_x^2}$, $B_i = \frac{2\lambda}{h_x^2} + \frac{\rho C}{\tau}$, $F_i = -\frac{\rho C}{\tau} T_{i,j}^n$.

Прогоночные коэффициенты α_i и β_i ($i=2, \dots, N_x-1$) определяются по выражениям (28) в результате прямой прогонки. Значения α_1 и β_1 находятся из левого граничного условия. В результате дискретизации граничного условия:

$$\frac{T_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} = 0.$$

Преобразуем полученное выражение к виду $T_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_1 T_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_1$:

$$T_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} = T_{2,j}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1; \\ \beta_1 = 0. \end{cases}$$

Значение температуры $T_{N_x,j}^{n+\frac{1}{2}}$ определяется из правого граничного условия.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L}^{n+\frac{1}{2}} &= 0; \\ \frac{T_{N_x,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{N_x-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} &= 0; \end{aligned}$$

$$T_{N_x, j}^{n+\frac{1}{2}} = T_{N_x-1, j}^{n+\frac{1}{2}};$$

Т.к. $T_{N_x-1, j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{N_x-1} T_{N_x, j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{N_x-1}$, то

$$T_{N_x, j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\beta_{N_x-1}}{1 - \alpha_{N_x-1}}.$$

В результате обратной прогонки рассчитываются значения температуры $T_{i, j}^{n+\frac{1}{2}}$ на промежуточном временном слое по выражению (27).

После определения поля температуры на первом полушаге по времени решается система уравнений (43). Этапы решения аналогичны решению, приведенному в п. 4.4, для уравнения теплопроводности с граничными условиями I рода.

Листинг программы численного решения рассматриваемой задачи (на языке программирования MATLAB).

```
clc; clear all;
```

```
%Ввод данных
```

```
%Эффективные значения теплофизических характеристик материала
```

```
lm=0.165;
```

```
p=2303;
```

```
c=859;
```

```
To=300; %Начальная температура
```

```
Tl=400; %Температура на нижней границе
```

```
Tr=250; %Температура на верхней границе
```

```
%Размеры пластины
```

```
L=0.1;
```

```
H=0.1;
```

```
tk=1500; %Время расчета
```

```
%Количество пространственных узлов
```

```
Nx=50;
```

```
Ny=50;
```

```
%Характеристика внутренних переменных для MATLAB
```

```
A = zeros(50);
```



```

B = zeros(50);
C = zeros(50);
F = zeros(50);
T = zeros(50);
a = zeros(50);
b = zeros(50);
x = zeros(50);
y = zeros(50);

```

```

%Решение

```

```

%Шаги разностной сетки по пространственной координате
hx=L/(Nx-1);
hy=H/(Ny-1);

```

```

%Шаг сетки по времени
dt=tk/100;

```

```

%Поле температуры в начальный момент времени
for i=2:Nx-1
    for j=2:Ny-1
        T(i,j)=To;
    end;
end;

```

```

%Начало отсчета времени
t=0;

```

```

%Цикл с предусловием, прямая прогонка
while t<=tk

```

```

    %Первый полушаг по времени
    for j=1:Ny
        %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранично-
        го условия
        a(1,j)=1;
        b(1,j)=0;
    end;

```

```

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
    (28)

```

```

        for i=2:Nx-1
            %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
            нальной матрицей
            A(i)=lm/(hx^2);
            B(i)=2*lm/(hx^2)+p*c/dt;
            C(i)=lm/(hx^2);

```

```

F(i)=-p*c*T(i,j)/dt;

%Прогоночные коэффициенты
a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
end;
end;

%Текущая координата
x(Nx)=L;

%Обратная прогонка
for j=1:Ny
    %Значение температуры на правой границе
    T(Nx,j)=b(Nx-1,j)/(1-a(Nx-1,j));
    i=Nx-1;
    while i>=1
        T(i,j)=a(i,j)*T(i+1,j)+b(i,j);
        x(i)=x(i+1)-hx;
        i=i-1;
    end;
end;

%Второй полушаг по времени
for i=1:Nx
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего гранич-
ного условия
    a(i,1)=0;
    b(i,1)=Tl;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28)
    for j=2:Ny-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        A(j)=lm/(hy^2);
        B(j)=2*lm/(hy^2)+p*c/dt;
        C(j)=lm/(hy^2);
        F(j)=-p*c*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
        b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    end;
end;

```

```

end;

%Текущая координата
y(Ny)=H;

%Обратная прогонка
for i=1:Nx
    %Значение температуры на верхней границе
    T(i,Ny)=Tr;
    j=Ny-1;
    while j>=1
        T(i,j)=a(i,j)*T(i,j+1)+b(i,j);
        y(j)=y(j+1)-hy;
        j=j-1;
    end;
end;

%Счетчик по времени
t=t+dt;
end;

%Вывод гиперповерхности температурного поля
figure(1);
surfc(x(1:Nx),y(1:Ny),T(1:Nx,1:Ny));
camorbit(85,-10);
xlabel('y (m)');
ylabel('x (m)');
zlabel('T (K)');

```

Результаты расчета приведены на рисунке 5.6.

Существуют задачи, когда подход (интерпретация гетерогенной структуры материала в виде однородной среды с усредненными значениями теплофизических характеристик), используемый для получения температурного поля (рис. 5.6) не позволяет достоверно установить закономерности и характеристики исследуемых процессов. Например, при горении некоторых твердых топлив, содержащих мелкодисперсные (несколько десятков микрометров) частицы характерный размер в температурном профиле соизмерим с размером этих частиц. Поэтому предположение о гомогенности структуры такого топлива справедливо лишь при размерах частиц много меньше характерного размера в температурном профиле.

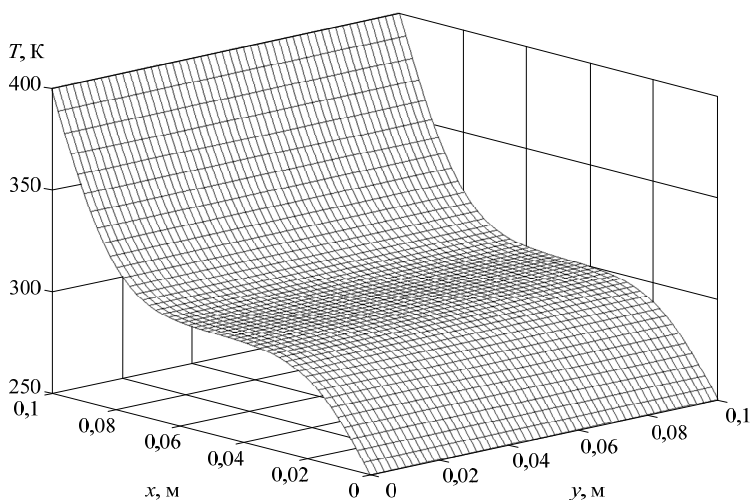


Рис. 5.6. Распределение температуры в пластине

5.3. Инертный прогрев пластины изоляционного материала с включениями металлических конструктивных элементов при учете в явном виде структурной неоднородности материала

Решим задачу (рис. 5.4) в рамках математической модели (34)–(37), описывающей в явном виде структурную неоднородность пластины изоляционного полимерного материала (из-за включений металлических конструктивных элементов).

Рассматриваемая задача сочетает комбинацию задач, решение которых приведено в пп. 5.1 и 5.2. Для решения задачи (34)–(37) введем равномерную пространственно-временную сетку.

Дискретизацию уравнений (34) и (35) будем проводить на основе локально-одномерной схемы А.А. Самарского [17]. Решение полученных систем линейных алгебраических уравнений проводится методом прогонки, при этом необходимо учесть, что в пластине полимера имеется четыре металлических включения. Эти включения описываются в прогоночных коэффициентах на границах сопряжения, а также в коэффициентах канонического уравнения вида (44) в зависимости от материала элемента.

Алгоритм решения рассматриваемой задачи можно представить сле-

дующим образом. Сначала выполняется первый полушаг по времени – в результате прямой и обратной прогонки в направлении оси x определяется температурное поле на промежуточном временном слое. Далее вновь реализуется метод прогонки в направлении оси y на втором полушаге по времени, что позволяет установить поле температуры на целом шаге по времени.

При реализации метода прогонки как в направлении оси x , так и y расчетная область (рис. 5.4) разбивается на группу элементарных областей. На первом полушаге по времени последовательно рассматриваются следующие области: $0 < y < y_1$, $0 < x < x_L$; $y_1 < y < y_2$, $0 < x < x_L$; $y_2 < y < y_3$, $0 < x < x_L$; $y_3 < y < y_4$, $0 < x < x_L$; $y_4 < y < y_H$, $0 < x < x_L$. На втором полушаге по времени также последовательно рассматриваются области: $0 < x < x_1$, $0 < y < y_H$; $x_1 < x < x_2$, $0 < y < y_H$; $x_2 < x < x_3$, $0 < y < y_H$; $x_3 < x < x_4$, $0 < y < y_H$; $x_4 < x < x_L$, $0 < y < y_H$.

Достаточно подробный листинг решения сформулированной задачи приведен далее. Листинг может быть оптимизирован за счет введения специальных процедур решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей методом прогонки при наличии включений с отличающимися теплофизическими характеристиками.

Листинг программы численного решения рассматриваемой задачи (на языке программирования MATLAB).

```
clc; clear all;
```

```
%Ввод данных
```

```
%Теплофизические характеристики полимера
```

```
lm1=0.14;
```

```
p1=1333;
```

```
c1=1257;
```

```
%Теплофизические характеристики металла
```

```
lm2=60;
```

```
p2=7800;
```

```
c2=460;
```

```
To=300; %Начальная температура
```

```
Tl=400; %Температура на нижней границе
```

```
Tr=250; %Температура на верхней границе
```

%Размеры пластины

L=0.1;

H=0.1;

tk=1500; %Время расчета

%Количество пространственных узлов

Nx=50;

Ny=50;

%Границы металлических включений

nx1=10;

nx2=20;

nx3=30;

nx4=40;

ny1=10;

ny2=20;

ny3=30;

ny4=40;

%Характеристика внутренних переменных для MATLAB

A = zeros(50);

B = zeros(50);

C = zeros(50);

F = zeros(50);

T = zeros(50);

a = zeros(50);

b = zeros(50);

x = zeros(50);

y = zeros(50);

%Решение

%Шаги разностной сетки по пространственной координате

hx=L/(Nx-1);

hy=H/(Ny-1);

%Шаг сетки по времени

dt=tk/100;

%Поле температуры в начальный момент времени

for i=2:Nx-1

for j=2:Ny-1

T(i,j)=To;

```

end;
end;

%Коэффициент температуропроводности полимера
aa1=lm1/(p1*c1);
%Коэффициент температуропроводности металла
aa2=lm2/(p2*c2);

%Начало отсчета времени
t=0;

%Цикл с предусловием, прямая прогонка
while t<=tk

%*****
%Первый полушаг по времени
%*****

%Однородная область (полиэтилен)
for j=1:ny1-1
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранично-
го условия
    a(1,j)=1;
    b(1,j)=0;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера
    for i=2:Nx-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        A(i)=lm1/(hx^2);
        B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*c1/dt;
        C(i)=lm1/(hx^2);
        F(i)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
        b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
    end;
end;

%Неоднородная область (полимер - металл)

```

```

for j=ny1:ny2-1
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранично-
го условия
    a(1,j)=1;
    b(1,j)=0;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера
    for i=2:nx1-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        A(i)=lm1/(hx^2);
        B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*c1/dt;
        C(i)=lm1/(hx^2);
        F(i)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
        b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
    end;

    %Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
    a(nx1,j)=2*aa1*aa2*dt*lm2/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(nx1-1,j)))+
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));
    b(nx1,j)=(2*aa1*aa2*dt*lm1*b(nx1-1,j)+(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1)*
T(nx1,j))/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(nx1-1,j)))+
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для металла
    for i=nx1+1:nx2-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        A(i)=lm2/(hx^2);
        B(i)=2*lm2/(hx^2)+p2*c2/dt;
        C(i)=lm2/(hx^2);
        F(i)=-p2*c2*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
        b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
    end;

    %Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода

```



```

a(nx2,j)=2*aa2*aa1*dt*lm1/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(nx2-1,j)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));
b(nx2,j)=(2*aa2*aa1*dt*lm2*b(nx2-1,j)+(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2)*
T(nx2,j))/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(nx2-1,j)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

```

(28) для полимера

```

for i=nx2+1:nx3-1

```

%Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей

```

A(i)=lm1/(hx^2);
B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*c1/dt;
C(i)=lm1/(hx^2);
F(i)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

```

%Прогоночные коэффициенты

```

a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
end;

```

```

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
a(nx3,j)=2*aa1*aa2*dt*lm2/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(nx3-1,j)))+(
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));
b(nx3,j)=(2*aa1*aa2*dt*lm1*b(nx3-1,j)+(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1)*
T(nx3,j))/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(nx3-1,j)))+(
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));

```

(28) для металла

```

for i=nx3+1:nx4-1

```

%Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей

```

A(i)=lm2/(hx^2);
B(i)=2*lm2/(hx^2)+p2*c2/dt;
C(i)=lm2/(hx^2);
F(i)=-p2*c2*T(i,j)/dt;

```

%Прогоночные коэффициенты

```

a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
end;

```

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода

```

a(nx4,j)=2*aa2*aa1*dt*lm1/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(nx4-1,j)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));
b(nx4,j)=(2*aa2*aa1*dt*lm2*b(nx4-1,j)+(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2)*
T(nx4,j))/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(nx4-1,j)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

```

```

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера

```

```

for i=nx4+1:Nx-1

```

```

    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
    нальной матрицей

```

```

    A(i)=lm1/(hx^2);

```

```

    B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*c1/dt;

```

```

    C(i)=lm1/(hx^2);

```

```

    F(i)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

```

```

    %Прогоночные коэффициенты

```

```

    a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));

```

```

    b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));

```

```

end;

```

```

end;

```

```

%Однородная область (полимер)

```

```

for j=ny2:ny3-1

```

```

    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранично-
    го условия

```

```

    a(1,j)=1;

```

```

    b(1,j)=0;

```

```

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера

```

```

for i=2:Nx-1

```

```

    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
    нальной матрицей

```

```

    A(i)=lm1/(hx^2);

```

```

    B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*c1/dt;

```

```

    C(i)=lm1/(hx^2);

```

```

    F(i)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

```

```

    %Прогоночные коэффициенты

```

```

    a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));

```

```

    b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));

```

```

end;

```

```

end;

```

```

%Неоднородная область (полимер - металл)
for j=ny3:ny4-1
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранично-
    го условия
    a(1,j)=1;
    b(1,j)=0;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
    (28) для полимера
    for i=2:nx1-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
        нальной матрицей
        A(i)=lm1/(hx^2);
        B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*c1/dt;
        C(i)=lm1/(hx^2);
        F(i)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
        b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
    end;

    %Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
    a(nx1,j)=2*aa1*aa2*dt*lm2/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(nx1-1,j)))+
    (hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));
    b(nx1,j)=(2*aa1*aa2*dt*lm1*b(nx1-1,j)+(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1)*
    T(nx1,j))/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(nx1-1,j)))+
    (hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
    (28) для металла
    for i=nx1+1:nx2-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
        нальной матрицей
        A(i)=lm2/(hx^2);
        B(i)=2*lm2/(hx^2)+p2*c2/dt;
        C(i)=lm2/(hx^2);
        F(i)=-p2*c2*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
        b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
    end;

```

```

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
a(nx2,j)=2*aa2*aa1*dt*lm1/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(nx2-1,j)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));
b(nx2,j)=(2*aa2*aa1*dt*lm2*b(nx2-1,j)+(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2)*
T(nx2,j))/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(nx2-1,j)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

```

(28) для полиэтилена

```

for i=nx2+1:nx3-1

```

%Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей

```

A(i)=lm1/(hx^2);
B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*c1/dt;
C(i)=lm1/(hx^2);
F(i)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

```

%Прогоночные коэффициенты

```

a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
end;

```

```

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
a(nx3,j)=2*aa1*aa2*dt*lm2/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(nx3-1,j)))+(
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));

```

```

b(nx3,j)=(2*aa1*aa2*dt*lm1*b(nx3-1,j)+(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1)*
T(nx3,j))/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(nx3-1,j)))+(
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));

```

(28) для металла

```

for i=nx3+1:nx4-1

```

%Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей

```

A(i)=lm2/(hx^2);
B(i)=2*lm2/(hx^2)+p2*c2/dt;
C(i)=lm2/(hx^2);
F(i)=-p2*c2*T(i,j)/dt;

```

%Прогоночные коэффициенты

```

a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));
end;

```

```

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
a(nx4,j)=2*aa2*aa1*dt*lm1/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(nx4-1,j)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));
b(nx4,j)=(2*aa2*aa1*dt*lm2*b(nx4-1,j)+(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2)*
T(nx4,j))/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(nx4-1,j)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

```

```

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера

```

```

for i=nx4+1:Nx-1

```

```

%Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей

```

```

A(i)=lm1/(hx^2);

```

```

B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*c1/dt;

```

```

C(i)=lm1/(hx^2);

```

```

F(i)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

```

```

%Прогоночные коэффициенты

```

```

a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));

```

```

b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));

```

```

end;

```

```

end;

```

```

%Однородная область (полимер)

```

```

for j=ny4:Ny

```

```

%Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранично-
го условия

```

```

a(1,j)=1;

```

```

b(1,j)=0;

```

```

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера

```

```

for i=2:Nx-1

```

```

%Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей

```

```

A(i)=lm1/(hx^2);

```

```

B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*c1/dt;

```

```

C(i)=lm1/(hx^2);

```

```

F(i)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

```

```

%Прогоночные коэффициенты

```

```

a(i,j)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));

```

```

b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1,j));

```

```

    end;
end;

%Текущая координата
x(Nx)=L;

%Обратная прогонка
for j=1:Ny
    %Значение температуры на правой границе
    T(Nx,j)=b(Nx-1,j)/(1-a(Nx-1,j));
    i=Nx-1;
    while i>=1
        T(i,j)=a(i,j)*T(i+1,j)+b(i,j);
        x(i)=x(i+1)-hx;
        i=i-1;
    end;
end;

%*****
%Второй полушаг по времени

%*****

%Однородная область (полиэтилен)
for i=1:nx1-1
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего гранич-
ного условия
    a(i,1)=0;
    b(i,1)=Tl;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера
    for j=2:Ny-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        A(j)=lm1/(hy^2);
        B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*c1/dt;
        C(j)=lm1/(hy^2);
        F(j)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
        b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    end;
end;

```

```

end;
end;

%Неоднородная область (полимер - металл)
for i=nx1:nx2-1
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего гранич-
ного условия
    a(i,1)=0;
    b(i,1)=Tl;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера
    for j=2:ny1-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        A(j)=lm1/(hy^2);
        B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*c1/dt;
        C(j)=lm1/(hy^2);
        F(j)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
        b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    end;

    %Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
    a(i,ny1)=2*aa1*aa2*dt*lm2/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(i,ny1-1)))+
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));
    b(i,ny1)=(2*aa1*aa2*dt*lm1*b(i,ny1-1)+(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1)*
T(i,ny1))/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(i,ny1-1)))+
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для металла
    for j=ny1+1:ny2-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        A(j)=lm2/(hy^2);
        B(j)=2*lm2/(hy^2)+p2*c2/dt;
        C(j)=lm2/(hy^2);
        F(j)=-p2*c2*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));

```

```

    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;

%Прогночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
a(i,ny2)=2*aa2*aa1*dt*lm1/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(i,ny2-1)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));
b(i,ny2)=(2*aa2*aa1*dt*lm2*b(i,ny2-1)+(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2)*
T(i,ny2))/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(i,ny2-1)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

%Цикл для определения прогночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера
for j=ny2+1:ny3-1
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
    A(j)=lm1/(hy^2);
    B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*c1/dt;
    C(j)=lm1/(hy^2);
    F(j)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

    %Прогночные коэффициенты
    a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;

%Прогночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
a(i,ny3)=2*aa1*aa2*dt*lm2/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(i,ny3-1)))+(
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));
b(i,ny3)=(2*aa1*aa2*dt*lm1*b(i,ny3-1)+(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1)*
T(i,ny3))/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(i,ny3-1)))+(
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));

%Цикл для определения прогночных коэффициентов по выражениям
(28) для металла
for j=ny3+1:ny4-1
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
    A(j)=lm2/(hy^2);
    B(j)=2*lm2/(hy^2)+p2*c2/dt;
    C(j)=lm2/(hy^2);
    F(j)=-p2*c2*T(i,j)/dt;

    %Прогночные коэффициенты
    a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));

```



```

    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
a(i,ny4)=2*aa2*aa1*dt*lm1/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(i,ny4-1)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));
    b(i,ny4)=(2*aa2*aa1*dt*lm2*b(i,ny4-1)+(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2)*
T(i,ny4))/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(i,ny4-1)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера
for j=ny4+1:Ny-1
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
    A(j)=lm1/(hy^2);
    B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*c1/dt;
    C(j)=lm1/(hy^2);
    F(j)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

    %Прогоночные коэффициенты
    a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;
end;

%Однородная область (полиэтилен)
for i=nx2:nx3-1
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего гранич-
ного условия
    a(i,1)=0;
    b(i,1)=Tl;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера
    for j=2:Ny-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        A(j)=lm1/(hy^2);
        B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*c1/dt;
        C(j)=lm1/(hy^2);
        F(j)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты

```

```

    a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;
end;

%Неоднородная область (полимер - металл)
for i=nx3:nx4-1
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего гранич-
ного условия
    a(i,1)=0;
    b(i,1)=Tl;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера
    for j=2:ny1-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        A(j)=lm1/(hy^2);
        B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*c1/dt;
        C(j)=lm1/(hy^2);
        F(j)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
        b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    end;

    %Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
    a(i,ny1)=2*aa1*aa2*dt*lm2/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(i,ny1-1)))+
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));
    b(i,ny1)=(2*aa1*aa2*dt*lm1*b(i,ny1-1)+(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1)*
T(i,ny1))/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(i,ny1-1)))+
(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для металла
    for j=ny1+1:ny2-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        A(j)=lm2/(hy^2);
        B(j)=2*lm2/(hy^2)+p2*c2/dt;
        C(j)=lm2/(hy^2);
        F(j)=-p2*c2*T(i,j)/dt;

```

```

%Прогоночные коэффициенты
a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
a(i,ny2)=2*aa2*aa1*dt*lm1/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(i,ny2-1)))+(
hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));
b(i,ny2)=(2*aa2*aa1*dt*lm2*b(i,ny2-1)+(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2)*
T(i,ny2))/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(i,ny2-1)))+(
hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера
for j=ny2+1:ny3-1
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
    нальной матрицей
    A(j)=lm1/(hy^2);
    B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*c1/dt;
    C(j)=lm1/(hy^2);
    F(j)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

    %Прогоночные коэффициенты
    a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
a(i,ny3)=2*aa1*aa2*dt*lm2/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(i,ny3-1)))+(
hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));
b(i,ny3)=(2*aa1*aa2*dt*lm1*b(i,ny3-1)+(hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1)*
T(i,ny3))/(2*aa1*aa2*dt*(lm2+lm1*(1-a(i,ny3-1)))+(
hx^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1));

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для металла
for j=ny3+1:ny4-1
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
    нальной матрицей
    A(j)=lm2/(hy^2);
    B(j)=2*lm2/(hy^2)+p2*c2/dt;
    C(j)=lm2/(hy^2);
    F(j)=-p2*c2*T(i,j)/dt;

```

```

%Прогоночные коэффициенты
a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода
a(i,ny4)=2*aa2*aa1*dt*lm1/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(i,ny4-1)))+(
hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));
b(i,ny4)=(2*aa2*aa1*dt*lm2*b(i,ny4-1)+(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2)*
T(i,ny4))/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(i,ny4-1)))+(
hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
(28) для полимера
for j=ny4+1:Ny-1
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
    нальной матрицей
    A(j)=lm1/(hy^2);
    B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*c1/dt;
    C(j)=lm1/(hy^2);
    F(j)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

    %Прогоночные коэффициенты
    a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;
end;

%Однородная область (полимер)
for i=nx4:Nx
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего гранич-
    ного условия
    a(i,1)=0;
    b(i,1)=Tl;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям
    (28) для полимера
    for j=2:Ny-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
        нальной матрицей
        A(j)=lm1/(hy^2);
        B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*c1/dt;
        C(j)=lm1/(hy^2);
        F(j)=-p1*c1*T(i,j)/dt;

```

```

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
        b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    end;
end;

%Текущая координата
y(Ny)=H;

%Обратная прогонка
for i=1:Nx
    %Значение температуры на верхней границе
    T(i,Ny)=Tr;
    j=Ny-1;
    while j>=1
        T(i,j)=a(i,j)*T(i,j+1)+b(i,j);
        y(j)=y(j+1)-hy;
        j=j-1;
    end;
end;

%Счетчик по времени
t=t+dt;
end;

%Вывод гиперповерхности температурного поля
figure(1);
surf(x(1:Nx),y(1:Ny),T(1:Nx,1:Ny));
camorbit(85,-10);
xlabel('y (m)');
ylabel('x (m)');
zlabel('T (K)');

```

Результаты расчета приведены на рисунке 5.7.

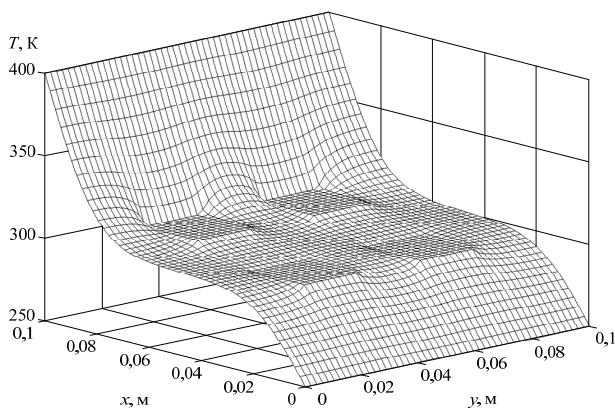


Рис. 5.7. Распределение температуры в пластине

5.4. Нагрев изоляционного материала потоком разогретого газа в условиях термического разложения

Требуется определить поле температуры в бесконечной полимерной пластине через 600, 3600 секунд в условиях термического разложения материала пластины (полиметилметакрилата). Толщина пластины $L = 0,2$ м. Теплофизические характеристики полимера: $\lambda = 0,2$ Вт/(м·К), $\rho = 1200$ кг/м³, $C = 1500$ Дж/(кг·К). Кинетические характеристики термического разложения: $Q = 1,6 \cdot 10^6$ Дж/кг, $k_0 = 3,6 \cdot 10^7$ 1/с, $E = 188 \cdot 10^3$ Дж/моль. Начальная температура $T_0 = 300$ К. На границах $x = 0$ и $x = L$ пластина контактирует с окружающей средой при $T_e = 400$ К, $\alpha = 40$ Вт/(м²·К).

Математическая модель исследуемого процесса представлена одномерным нелинейным уравнением теплопроводности с эндотермической реакцией в материале с соответствующими начальными и граничными условиями III рода.

Уравнение теплопроводности, учитывающее термическое разложение полимера:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - Q k_0 \rho \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad 0 < x < L.$$

Начальные и граничные условия:

$$t=0: T=T_0, \quad 0 \leq x \leq L;$$

$$x=0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T_e - T), \quad t > 0;$$

$$x=L: \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T_e - T), t > 0.$$

Приняты обозначения: Q – тепловой эффект химической реакции; k – предэкспоненциальный множитель; E – энергия активации; R – универсальная газовая постоянная, $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

Для решения сформулированной краевой задачи применим метод конечных разностей на основе неявной четырехточечной разностной схемы совместно с методом простой итерации. В результате аппроксимации частных производных разностными аналогами получим систему уравнений:

$$\rho C \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) - Q k_0 \rho \exp \left(-\frac{E}{RT_i^{n+1}} \right), i=2, \dots, N-1, n \geq 0$$

Систему уравнений можно свести к наиболее общему виду:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i-1}^{n+1} = F_i, i=2, \dots, N-1,$$

$$\text{где } A_i = C_i = \frac{\lambda}{h^2}, B_i = \frac{2\lambda}{h^2} + \frac{\rho C}{\tau}, F_i = -\frac{\rho C}{\tau} T_i^n + Q k_0 \rho \exp \left(-\frac{E}{RT_i^{n+1}} \right).$$

Коэффициент F_i зависит от температуры на новом временном слое, поэтому необходимо воспользоваться методом простой итерации. Суть этого метода состоит в определении поля температуры на каждом временном слое до тех пор, пока разность между локальными значениями температуры на данной и предыдущей итерации не будет минимальна:

$$\max_i |T_i^{s+1} - T_i^s| \leq \varepsilon,$$

где ε – точность вычислений.

Выведем прогоночные коэффициенты для первого узла разностной сетки. В результате дискретизации г.у. III рода:

$$-\lambda \frac{T_2 - T_1}{h} = \alpha(T_e - T_1).$$

Преобразуем полученное выражение к виду $T_1 = \alpha_1 T_2 + \beta_1$:

$$T_1 - T_2 = \frac{\alpha h}{\lambda} T_e - \frac{\alpha h}{\lambda} T_1;$$

$$T_1 = \frac{1}{1 + \alpha h / \lambda} T_2 + \frac{\alpha h / \lambda}{1 + \alpha h / \lambda} T_e.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha h}; \\ \beta_1 = \frac{\alpha h}{\lambda + \alpha h} T_e. \end{cases}$$

Проведем дискретизацию г.у. III рода в рамках аппроксимации второ-

го порядка относительно шага по пространственной координате. Предположим, что на границе выполняется уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где a – коэффициент температуропроводности, м²/с.

Разложим функцию $T(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ до членов второго порядка относительно h :

$$T_2^{n+1} = T_1^{n+1} + h \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x=0}^{n+1}.$$

Учитывая уравнение теплопроводности ($\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$), перепишем полученное выражение в виде

$$T_2^{n+1} = T_1^{n+1} + h \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+1} + \frac{h^2}{2a} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x=0}^{n+1}.$$

Отсюда получим:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+1} = \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{h} - \frac{h}{2a} \frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\tau} = \frac{\alpha}{\lambda} T_1^{n+1} - \frac{\alpha}{\lambda} T_e.$$

Преобразуем полученное выражение к виду $T_1^{n+1} = \alpha_1 T_2^{n+1} + \beta_1$:

$$T_1^{n+1} = \frac{2a\tau\lambda}{\lambda h^2 + 2a\tau(\lambda + \alpha h)} T_2^{n+1} + \frac{\lambda h^2 T_1^n + 2a\tau h \alpha T_e}{\lambda h^2 + 2a\tau(\lambda + \alpha h)}.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2a\tau\lambda}{\lambda h^2 + 2a\tau(\lambda + \alpha h)}; \\ \beta_1 = \frac{\lambda h^2 T_1^n + 2a\tau h \alpha T_e}{\lambda h^2 + 2a\tau(\lambda + \alpha h)}. \end{cases}$$

Используя правое граничное условие, определим значение температуры T_N :

$$\begin{aligned} T_{N-1}^{n+1} &= T_N^{n+1} - h \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L}^{n+1} + \frac{h^2}{2a} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x=L}^{n+1}; \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L}^{n+1} &= \frac{T_N^{n+1} - T_{N-1}^{n+1}}{h} + \frac{h}{2a} \frac{T_N^{n+1} - T_N^n}{\tau} = \frac{\alpha}{\lambda} T_e - \frac{\alpha}{\lambda} T_N^{n+1}; \\ 2a\lambda\tau T_N^{n+1} - 2a\lambda\tau T_{N-1}^{n+1} + \lambda h^2 T_N^{n+1} - \lambda h^2 T_N^n - 2a\tau h \alpha T_e + 2a\tau h \alpha T_N^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Т.к. $T_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} T_N^{n+1} + \beta_{N-1}$, то

$$T_N^{n+1} = \frac{\lambda h^2 T_N^n + 2a\tau(\lambda \beta_{N-1} + h \alpha T_e)}{\lambda h^2 + 2a\tau(\alpha h + \lambda(1 - \alpha_{N-1}))}.$$

Листинг программы численного решения рассматриваемой задачи (на языке программирования MATLAB).

```
clc; clear all;
```

```
%Ввод данных
```

```
%Теплофизические характеристики полиметилметакрилата
```

```
lm=0.2;
```

```
p=1200;
```

```
Cp=1500;
```

```
%Кинетические характеристики термического разложения
```

```
Q=1.6*10^6;
```

```
k0=3.6*10^7;
```

```
E=188*10^3;
```

```
R=8.31; %Универсальная газовая постоянная
```

```
To=300; %Начальная температура полимера
```

```
Te=400; %Температура газа
```

```
k=40; %Коэффициент теплообмена
```

```
L=0.2; %Толщина пластины
```

```
tk=600; %Время расчета
```

```
N=50; % Количество узлов пространственной разностной сетки
```

```
eps=1/(10^3); %Точность вычислений в рамках метода итерации
```

```
%Характеристика внутренних переменных для MATLAB
```

```
A = zeros(50);
```

```
B = zeros(50);
```

```
C = zeros(50);
```

```
F = zeros(50);
```

```
T = zeros(50);
```

```
Tn = zeros(50);
```

```
Ts = zeros(50);
```

```
a = zeros(50);
```

```
b = zeros(50);
```

```
x = zeros(50);
```

```
%Решение
```

%Шаг разностной сетки по пространственной координате
 $h=L/(N-1);$

%Шаг сетки по времени
 $dt=tk/100;$

%Поле температуры в начальный момент времени
for i=1:N
 $T(i)=T_0;$
end;

%Начало отсчета времени
 $t=0;$

%Цикл с предусловием, прямая прогонка
while $t \leq tk$

 %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого граничного условия

$a(1)=2*dt*lm/(2*dt*(lm+k*h)+p*Cp*(h^2));$
 $b(1)=(p*Cp*(h^2)*T(1)+2*dt*k*h*Te)/(2*dt*(lm+k*h)+p*Cp*(h^2));$

 %Запоминание поля температуры на предыдущем шаге по времени (для итерационного цикла)

 for i=1:N
 $Tn(i)=T(i);$
 end;
 max=1;

 %Итерационный цикл с постусловием
 while max $\geq \epsilon$

 for i=1:N
 $Ts(i)=T(i);$
 end;

 %Цикл для определения прогоночных коэффициентов
 for i=2:N-1

$A(i)=lm/(h^2);$
 $B(i)=2*lm/(h^2)+p*Cp/dt;$
 $C(i)=lm/(h^2);$
 $F(i)=-p*Cp*Tn(i)/dt+Q*k0*p*exp(-E/(R*T(i)));$

 %Прогоночные коэффициенты

$a(i)=A(i)/(B(i)-C(i)*a(i-1));$
 $b(i)=(C(i)*b(i-1)-F(i))/(B(i)-C(i)*a(i-1));$

```

end;

%Координата и значение температуры на правой границе
T(N)=(p*Cp*(h^2)*Tn(N)+2*dt*(lm*b(N-
1)+k*h*Te))/(p*Cp*(h^2)+2*dt*
(lm*(1-a(N-1))+k*h));
x(N)=L;

%Обратная прогонка
while i>=1
    T(i)=a(i)*T(i+1)+b(i);
    x(i)=x(i+1)-h;
    i=i-1;
end;

%Определение модуля разности температур на данной и предыдущей
итерациях
max=abs(T(1)-Ts(1));
for i=2:N
    if max<abs(T(i)-Ts(i))
        max=abs(T(i)-Ts(i));
    end;
end;
end;

%Счетчик по времени
t=t+dt;
end;

%Вывод графика
plot(x(1:N),T(1:N));

```

Результаты расчета приведены на рисунке 5.8.

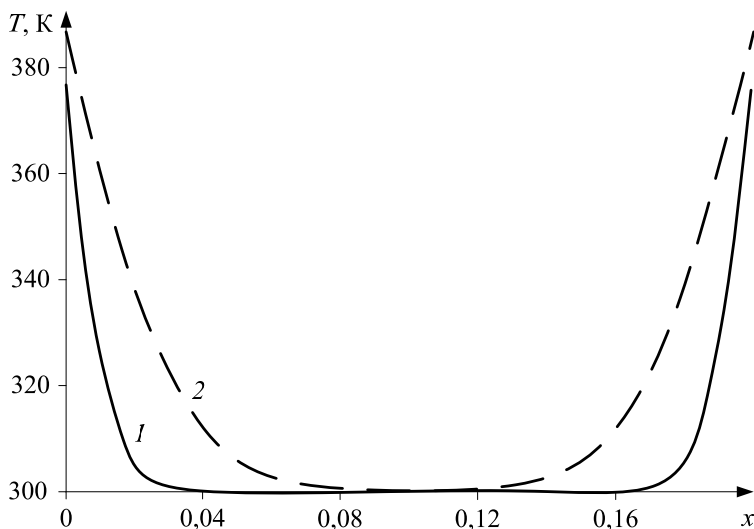


Рис. 5.8. Распределения температуры по толщине пластины:
1 – $t = 600$ с; 2 – $t = 3600$ с

5.5. Твердофазное зажигание композитного топлива при нагреве металлической частицей

Требуется определить поле температуры в системе «воздух – горячая частица – композитное топливо» (рис. 5.9) через 0,5 секунды в условиях экзотермического реагирования при нагревании горючего компонента и окислителя, входящих в состав топлива. Размеры области решения $x_L = 0,01$ м, $y_H = 0,01$ м; размеры стальной частицы $x_l = 0,002$ м, $y_h = 0,002$ м. Теплофизические характеристики веществ и материалов: воздух – $\lambda_1 = 0,026$ Вт/(м·К), $\rho_1 = 1,161$ кг/м³, $C_1 = 1190$ Дж/(кг·К); сталь – $\lambda_2 = 36$ Вт/(м·К), $\rho_2 = 8100$ кг/м³, $C_2 = 545$ Дж/(кг·К); топливо – $\lambda_3 = 0,75$ Вт/(м·К), $\rho_3 = 1776$ кг/м³, $C_3 = 1260$ Дж/(кг·К). Кинетические параметры процесса экзотермического реагирования: $E_3 = 50 \cdot 10^3$ Дж/моль, $k_3^0 = 1,7 \cdot 10^3$ 1/с, $Q_3 = 10^6$ Дж/кг. Начальная температура воздуха и топлива $T_0 = 300$ К; начальная температура стальной частицы $T_p = 1000$ К. Внешние границы области решения являются адиабатическими. В результате теплоотдачи от локального источника нагрева (стальной частицы) происходит прогрев топлива и воздуха. На границах «частица – топливо», «частица – воздух», «воздух – топливо» заданы граничные условия IV рода.

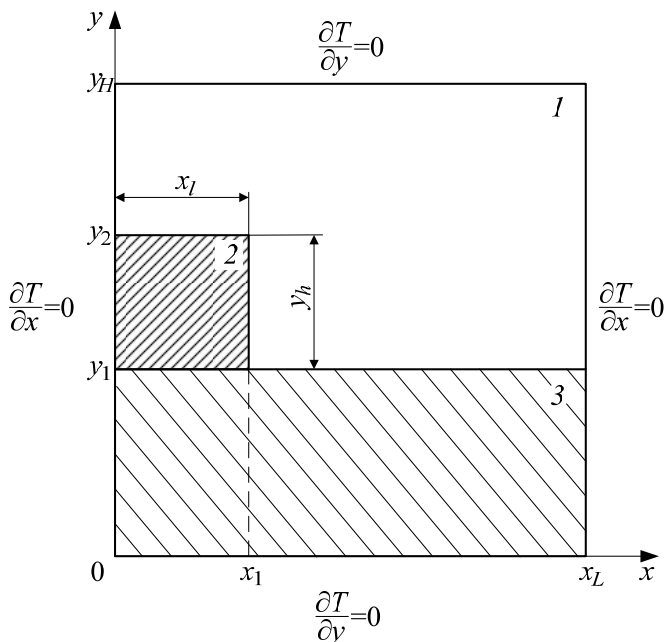


Рис. 5.9. Схема области решения задачи: 1 – воздух, 2 – стальная частица, 3 – композитное топливо; размеры: $x_1=0,002$ м, $y_1=0,002$ м, $y_2=0,004$ м

Математическая модель исследуемого процесса представлена системой двумерных линейных и нелинейных (экзотермическое реагирование в материале) уравнений теплопроводности с соответствующими начальными и граничными условиями IV рода.

Уравнения теплопроводности для воздуха, стальной частицы и топлива:

при $x_1 < x < x_L$, $y_1 < y < y_2$; $0 < x < x_L$, $y_2 < y < y_H$:

$$\rho_1 C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right); \quad (45)$$

при $0 < x < x_1$, $y_1 < y < y_2$:

$$\rho_2 C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right); \quad (46)$$

при $0 < x < x_L$, $0 < y < y_1$:

$$\rho_3 C_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \lambda_3 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} \right) + Q_3 \rho_3 k_3^0 \exp \left(-\frac{E_3}{RT_3} \right). \quad (47)$$

Начальные условия:

$$t=0: T=T_0, x_1 < x < x_L, y_1 < y < y_2; 0 < x < x_L, y_2 < y < y_H; 0 < x < x_L, 0 < y < y_1; \quad (48) \\ T=T_p, 0 < x < x_1, y_1 < y < y_2.$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} x=0, 0 < y < y_H: \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, t > 0; \\ x=x_L, 0 < y < y_H: \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, t > 0; \\ y=0, 0 < x < x_L: \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, t > 0; \\ y=y_H, 0 < x < x_L: \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, t > 0; \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} x=x_1, y_1 < y < y_2: -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} &= -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}, T_1=T_2, t > 0; \\ y=y_1, 0 < x < x_1: -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} &= -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial y}, T_2=T_3, t > 0; \\ y=y_1, x_1 < x < x_L: -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} &= -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial y}, T_1=T_3, t > 0; \\ y=y_2, 0 < x < x_1: -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} &= -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y}, T_1=T_2, t > 0. \end{aligned}$$

Рассматриваемая задача сочетает комбинацию задач, решение которых приведено в пп. 5.3 и 5.4. Для решения задачи (45)–(49) введем равномерную пространственно-временную сетку.

Дискретизацию уравнений (45)–(47) будем проводить на основе локально-одномерной схемы А.А. Самарского [17]. Решение полученных систем линейных алгебраических уравнений проводится методом прогонки, при этом необходимо учесть, неоднородность области решения (рис. 5.9) рассматриваемой задачи для системы «воздух – горячая частица – топливо». Неоднородность описывается в прогоночных коэффициентах на границах сопряжения, а также в коэффициентах канонического уравнения вида (44) в зависимости от материала элемента.

Уравнение теплопроводности для топлива в правой части содержит слагаемое, которое описывает тепловыделение в результате протекания экзотермического реагирования компонентов топлива. Поэтому коэффициент F_i канонического уравнения вида (44) зависит от температуры на но-

вом временном слое. Вследствие этого необходимо воспользоваться методом простой итерации для определения поля температуры на каждом полушаге по времени (до тех пор, пока разность между локальными значениями температуры на данной и предыдущей итерации не будет минимальна).

Алгоритм решения рассматриваемой задачи можно представить следующим образом. Сначала выполняется первый полушаг по времени – в результате прямой и обратной прогонки в направлении оси x при реализации итерационного цикла определяется температурное поле на промежуточном временном слое. Далее вновь реализуется метод прогонки в направлении оси y в условиях метода простой итерации на втором полушаге по времени, что позволяет установить поле температуры на целом шаге по времени.

При реализации метода прогонки как в направлении оси x , так и y расчетная область (рис. 5.9) разбивается на группу элементарных областей. На первом полушаге по времени последовательно рассматриваются следующие области: $0 < y < y_1$, $0 < x < x_L$; $y_1 < y < y_2$, $0 < x < x_L$; $y_2 < y < y_H$, $0 < x < x_L$. На втором полушаге по времени также последовательно рассматриваются области: $0 < x < x_1$, $0 < y < y_H$; $x_1 < x < x_L$, $0 < y < y_H$.

Листинг программы численного решения рассматриваемой задачи (на языке программирования MATLAB).

```
clc; clear all;
```

```
%Ввод данных
```

```
%Теплофизические характеристики воздуха
```

```
lm1=0.026;
```

```
p1=1.161;
```

```
Cr1=1190;
```

```
%Теплофизические характеристики стали
```

```
lm2=36;
```

```
p2=8100;
```

```
Cr2=545;
```

```
%Теплофизические характеристики композитного топлива
```

```
lm3=0.75;
```

```
p3=1776;
```

Ср3=1260;

%Кинетические характеристики экзотермического реагирования

Q3=10^6;

k03=1.7*(10^3);

E3=50*(10^3);

%Универсальная газовая постоянная

R=8.31;

To=300; %Начальная температура топлива и воздуха

Tr=1000; %Начальная температура стальной частицы

%Размеры области решения

L=0.01;

H=0.01;

%Время расчета

tk=0.5;

%Общее количество шагов

Nx=200;

Ny=200;

%Номера шагов для границ горячей частицы

nx1=40;

ny1=40;

ny2=80;

ee=0.5; %Точность вычислений температуры в рамках метода итерации

%Характеристика внутренних переменных для MATLAB

A = zeros(200);

B = zeros(200);

C = zeros(200);

F = zeros(200);

a = zeros(200,200);

b = zeros(200,200);

T = zeros(200,200);

T1 = zeros(200,200);

arr = zeros(200,200);

[x,y] = meshgrid(1:Nx,1:Ny);

%Решение


```

%Шаги разностной сетки по пространственным координатам
hx=L/(Nx-1);
hy=H/(Ny-1);

%Шаг сетки по времени
dt=10^(-3);

%Поле температуры в начальный момент времени
parfor i=1:Nx
    for j=1:Ny
        T(i,j)=To;
    end;
end;

for i=1:nx1
    for j=ny1:ny2
        T(i,j)=Tp;
    end;
end;

%Коэффициент температуропроводности воздуха
aa1=lm1/(p1*Cr1);
%Коэффициент температуропроводности стали
aa2=lm2/(p2*Cr2);
%Коэффициент температуропроводности композитного топлива
aa3=lm3/(p3*Cr3);

%Начало отсчета времени
t=0;

%Цикл с предусловием
while t<=tk

%*****
%Первый полушаг по времени

%*****

%Реализация метода итерации на первом полушаге по времени
k=2;
%Запоминание поля температуры на предыдущем шаге по времени
T1(1:Nx,1:Ny,k)=T(1:Nx,1:Ny);

```

```

flag_eps=1;
while ((flag_eps)&&(k<1000))

    %Однородная область (композитное топливо)
    for j=1:ny1
        %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранич-
ного условия
        a(1,j)=1;
        b(1,j)=0;

        %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для композитного топлива
        for i=2:Nx-1
            %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей
            A(i)=lm3/(hx^2);
            B(i)=2*lm3/(hx^2)+p3*Cp3/dt;
            C(i)=lm3/(hx^2);
            F(i)=-p3*Cp3*T(i,j)/dt-Q3*p3*k03*exp(-E3/(R*T(i,j)))/2;

            %Прогоночные коэффициенты
            a(i,j)=A(i)/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
            b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
        end;
    end;

    %Неоднородная область (стальная частица - воздух)
    for j=ny1+1:ny2
        %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранич-
ного условия
        a(1,j)=1;
        b(1,j)=0;

        %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для стальной частицы
        for i=2:nx1-1
            %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей
            A(i)=lm2/(hx^2);
            B(i)=2*lm2/(hx^2)+p2*Cp2/dt;
            C(i)=lm2/(hx^2);
            F(i)=-p2*Cp2*T(i,j)/dt;

            %Прогоночные коэффициенты

```

```

a(i,j)=A(i)/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
end;

```

```

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV
рода
a(nx1,j)=2*aa2*aa1*dt*lm1/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(nx1-1,j)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));
b(nx1,j)=(2*aa2*aa1*dt*lm2*b(nx1-1,j)+(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2)*
T(nx1,j))/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(nx1-1,j)))+(
(hx^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

```

```

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для воздуха
for i=nx1+1:Nx-1
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей
    A(i)=lm1/(hx^2);
    B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*Cp1/dt;
    C(i)=lm1/(hx^2);
    F(i)=-p1*Cp1*T(i,j)/dt;

```

```

    %Прогоночные коэффициенты
    a(i,j)=A(i)/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
    b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
end;
end;

```

```

%Однородная область (воздух)
for j=ny2+1:Ny
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранич-
ного условия
    a(1,j)=1;
    b(1,j)=0;

```

```

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для воздуха
for i=2:Nx-1
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей
    A(i)=lm1/(hx^2);
    B(i)=2*lm1/(hx^2)+p1*Cp1/dt;
    C(i)=lm1/(hx^2);
    F(i)=-p1*Cp1*T(i,j)/dt;

```

```

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(i)/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
        b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
    end;
end;

%Текущая координата
x(Nx)=L;

%Обратная прогонка
for j=1:Ny
    %Значение температуры на правой границе
    T1(Nx,j,k+1)=b(Nx-1,j)/(1-a(Nx-1,j));
    i=Nx-1;
    while i>=1
        T1(i,j,k+1)=a(i,j)*T1(i+1,j,k+1)+b(i,j);
        x(i)=x(i+1)-hx;
        i=i-1;
    end;
end;

%Проверка сходимости итерационного метода
flag_eps=0;
nmr=1;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        %Определение модуля разности температур на данной и преды-
        %дущей итерациях
        arr(nmr)=abs(T1(i,j,k+1)-T1(i,j,k));
        if (arr(nmr)>=ee)
            flag_eps=1;
        end
        nmr=nmr+1;
    end
end
max_err=max(arr);
min_err=min(arr);
k=k+1;
end;
T(1:Nx,1:Ny)=T1(1:Nx,1:Ny,k);

```

```

%*****
%Второй полушаг по времени

%*****

%Реализация метода итерации на втором полушаге по времени
k=2;
%Запоминание поля температуры на предыдущем шаге по времени
T1(1:Nx,1:Ny,k)=T(1:Nx,1:Ny);
flag_eps=1;
while ((flag_eps)&&(k<1000))

    %Неоднородная область (композитное топливо - стальная частица -
воздух)
    for i=1:nx1
        %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего гра-
ничного условия
        a(i,1)=2*aa3*dt/(2*aa3*dt+(hy^2));
        b(i,1)=(hy^2)*T(i,1)/(2*aa3*dt+(hy^2));

        %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для композитного топлива
        for j=2:ny1-1
            %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей
            A(j)=lm3/(hy^2);
            B(j)=2*lm3/(hy^2)+p3*Cp3/dt;
            C(j)=lm3/(hy^2);
            F(j)=-p3*Cp3*T(i,j)/dt-Q3*p3*k03*exp(-E3/(R*T(i,j)))/2;

            %Прогоночные коэффициенты
            a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
            b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
        end;

        %Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV
рода
        a(i,ny1)=2*aa3*aa2*dt*lm2/(2*aa3*aa2*dt*(lm2+lm3*(1-a(i,ny1-1)))+(
hy^2)*(aa3*lm2+aa2*lm3));
        b(i,ny1)=(2*aa3*aa2*dt*lm3*b(i,ny1-1)+(hy^2)*(aa2*lm3+aa3*lm2)*
T(i,ny1))/(2*aa3*aa2*dt*(lm2+lm3*(1-a(i,ny1-1)))+(
hy^2)*(aa3*lm2+aa2*lm3));

```

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям (28) для стальной частицы

for j=ny1+1:ny2-1

%Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей

A(j)=lm2/(hy^2);

B(j)=2*lm2/(hy^2)+p2*Cp2/dt;

C(j)=lm2/(hy^2);

F(j)=-p2*Cp2*T(i,j)/dt;

%Прогоночные коэффициенты

a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));

b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));

end;

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV рода

a(i,ny2)=2*aa2*aa1*dt*lm1/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(i,ny2-1)))+(hy^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

b(i,ny2)=(2*aa2*aa1*dt*lm2*b(i,ny2-1)+(hy^2)*(aa1*lm2+aa2*lm1)*T(i,ny2))/(2*aa2*aa1*dt*(lm1+lm2*(1-a(i,ny2-1)))+(hy^2)*(aa2*lm1+aa1*lm2));

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям (28) для воздуха

for j=ny2+1:Ny-1

%Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей

A(j)=lm1/(hy^2);

B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*Cp1/dt;

C(j)=lm1/(hy^2);

F(j)=-p1*Cp1*T(i,j)/dt;

%Прогоночные коэффициенты

a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));

b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));

end;

end;

%Неоднородная область (композитное топливо - воздух)

for i=nx1+1:Nx

%Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего граничного условия

a(i,1)=2*aa3*dt/(2*aa3*dt+(hy^2));

```

b(i,1)=(hy^2)*T(i,1)/(2*aa3*dt+(hy^2));

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для композитного топлива
for j=2:ny1-1
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей
    A(j)=lm3/(hy^2);
    B(j)=2*lm3/(hy^2)+p3*Cp3/dt;
    C(j)=lm3/(hy^2);
    F(j)=-p3*Cp3*T(i,j)/dt-Q3*p3*k03*exp(-E3/(R*T(i,j)))/2;

    %Прогоночные коэффициенты
    a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV
рода
a(i,ny1)=2*aa3*aa1*dt*lm1/(2*aa3*aa1*dt*(lm1+lm3*(1-a(i,ny1-1)))+(
hy^2)*(aa3*lm1+aa1*lm3));
b(i,ny1)=(2*aa3*aa1*dt*lm3*b(i,ny1-1)+(hy^2)*(aa1*lm3+aa3*lm1)*
T(i,ny1))/(2*aa3*aa1*dt*(lm1+lm3*(1-a(i,ny1-1)))+(
hy^2)*(aa3*lm1+aa1*lm3));

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для воздуха
for j=ny1+1:Ny
    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей
    A(j)=lm1/(hy^2);
    B(j)=2*lm1/(hy^2)+p1*Cp1/dt;
    C(j)=lm1/(hy^2);
    F(j)=-p1*Cp1*T(i,j)/dt;

    %Прогоночные коэффициенты
    a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;
end;

%Текущая координата
y(Ny)=H;

```

```

%Обратная прогонка
for i=1:Nx
    %Значение температуры на верхней границе
    T1(i,Ny,k+1)=(2*aa1*dt*lm1*b(i,Ny-1)+lm1*(hy^2)*T(i,Ny))/
(lm1*(hy^2)+2*aa1*dt*lm1*(1-a(i,Ny-1)));
    j=Ny-1;
    while j>=1
        T1(i,j,k+1)=a(i,j)*T1(i,j+1,k+1)+b(i,j);
        y(j)=y(j+1)-hy;
        j=j-1;
    end;
end;

%Проверка сходимости итерационного метода
flag_eps=0;
nmr=1;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        %Определение модуля разности температур на данной и преды-
        дущей итерациях
        arr(nmr)=abs(T1(i,j,k+1)-T1(i,j,k));
        if (arr(nmr)>=ee)
            flag_eps=1;
        end
        nmr=nmr+1;
    end
end
max_err=max(arr);
min_err=min(arr);
k=k+1;
ky=k;
end;
T(1:Nx,1:Ny)=T1(1:Nx,1:Ny,k);

%Счетчик по времени
t=t+dt;
end;

%Вывод графика
figure(1);
[C,h] = contour(y(1:Ny),x(1:Nx),T(1:Nx,1:Ny));

```

Результаты расчета приведены на рисунке 5.10.

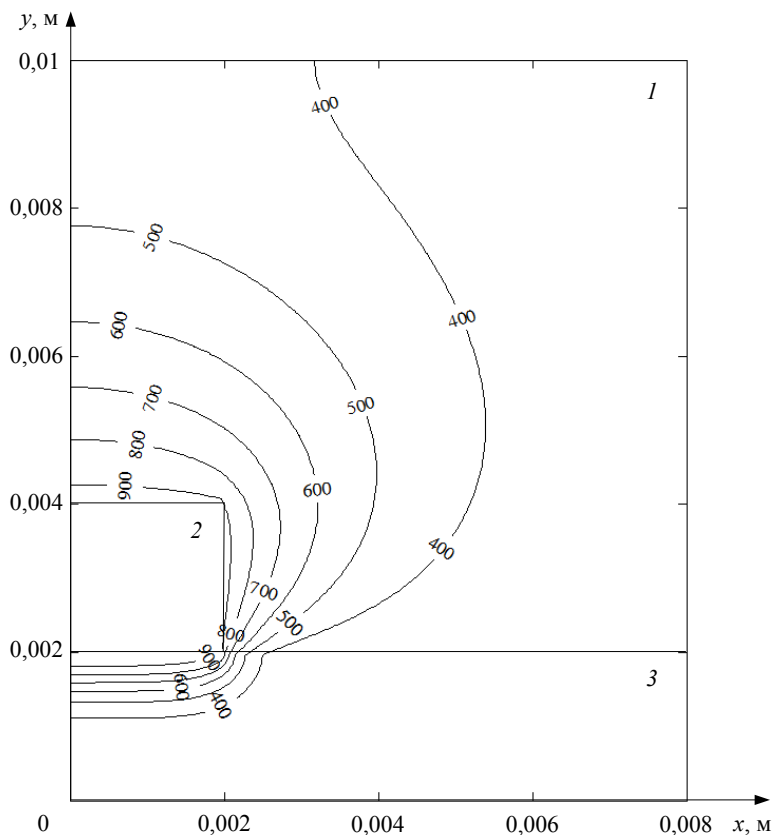


Рис. 5.10. Изотермы (T , К) в области решения задачи:
 1 – воздух, 2 – стальная частица, 3 – композитное топливо

5.6. Нагрев жидкого топлива лучистым тепловым потоком в условиях испарения

Требуется определить поле температуры в пленке жидкого топлива через 10 секунд в условиях испарения со свободной поверхности. Толщина пленки $H = 0,01$ м. Теплофизические характеристики топлива: $\lambda = 0,16$ Вт/(м·К), $\rho = 751$ кг/м³, $C = 2060$ Дж/(кг·К), $M = 0,1$ кг/моль. Характеристики испарения: $A = 0,1$, $P_0 = 10^5$ Н/м², $q = 10^4$ Вт/м², $Q_e = 29,4 \cdot 10^3$ Дж/кг. Начальная температура $T_0 = 300$ К.

Математическая модель исследуемого процесса представлена одномерным линейным уравнением теплопроводности с соответствующими начальными и нелинейными граничными условиями II рода (фазовое превращение). Начало оси y совпадает с верхней границей пленки жидкого топлива, ось направлена вниз.

Уравнение теплопроводности:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad 0 < y < H.$$

Начальные и граничные условия:

$$t=0: T=T_0, \quad 0 \leq y \leq H;$$

$$y=0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = q - W_e Q_e, \quad t > 0;$$

$$y=H: T=T_0, \quad t > 0,$$

где $W_e = \frac{A(P^s - P^*)}{\sqrt{\frac{2\pi RT}{M}}}$ – скорость испарения, кг/(м²·с); $P^s = P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT}\right)$ –

давление насыщенного пара, Н/м²; A – коэффициент аккомодации; P_0 – предэкспоненциальный множитель; Q_e – энергия активации; R – универсальная газовая постоянная, $R = 8,31$ Дж/(моль·К); M – молекулярная масса, q – плотность теплового потока. Примем, что P^* – атмосферное давление, $P^* = P_a$.

Определим первые прогоночные коэффициенты α_1 и β_1 из соотношения $T_1 = \alpha_1 T_2 + \beta_1$.

Запишем верхнее граничное условие в виде:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = q - \frac{A \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT|_{y=0}}\right) - P^* \right) Q_e}{\sqrt{\frac{2\pi RT|_{y=0}}{M}}}.$$

Проведем дискретизацию граничного условия:

$$-\lambda \frac{T_2 - T_1}{h} = q - \frac{A \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_1}\right) - P_a \right) Q_e}{\sqrt{\frac{2\pi RT_1}{M}}};$$

$$T_1 - T_2 = \frac{qh}{\lambda} - \frac{Ah \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_1}\right) - P_a \right) Q_e}{\lambda \sqrt{\frac{2\pi RT_1}{M}}};$$

$$T_1 = T_2 + \frac{qh}{\lambda} - \frac{Ah \left(P_0 \exp \left(-\frac{Q_e}{RT_1} \right) - P_a \right) Q_e}{\lambda \sqrt{\frac{2\pi RT_1}{M}}}.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 1; \\ \beta_1 = \frac{qh}{\lambda} - \frac{Ah \left(P_0 \exp \left(-\frac{Q_e}{RT_1} \right) - P_a \right) Q_e}{\lambda \sqrt{\frac{2\pi RT_1}{M}}}. \end{array} \right.$$

Прогоночный коэффициент β_1 нелинейным образом зависит от температуры на верхней границе. Для определения поля температуры необходимо использовать метод простой итерации.

Температура на нижней границе пленке жидкого топлива поддерживается постоянной, поэтому $T_N = T_0$.

Предположим, что начало оси y совпадает с нижней границей пленки жидкого топлива, а ось направлена вверх. Тогда значение температуры T_N , будет определяться из верхнего граничного условия:

$$y=H: \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = q - W_e Q_e, \quad \epsilon > 0;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=H} = q - \frac{A \left(P_0 \exp \left(-\frac{Q_e}{RT} \Big|_{y=H} \right) - P^* \right) Q_e}{\sqrt{\frac{2\pi RT}{M}} \Big|_{y=H}};$$

$$\lambda \frac{T_N - T_{N-1}}{h} = q - \frac{A \left(P_0 \exp \left(-\frac{Q_e}{RT_N} \right) - P_a \right) Q_e}{\sqrt{\frac{2\pi RT_N}{M}}}.$$

Т.к. $T_{N-1} = \alpha_{N-1} T_N + \beta_{N-1}$, то

$$T_N - \alpha_{N-1} T_N - \beta_{N-1} = \frac{qh}{\lambda} - \frac{Ah \left(P_0 \exp \left(-\frac{Q_e}{RT_N} \right) - P_a \right) Q_e}{\lambda \sqrt{\frac{2\pi RT_N}{M}}};$$

$$T_N = \frac{\lambda\beta_{N-1} + qh}{\lambda(1 - \alpha_{N-1})} - \frac{Ah \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_N}\right) - P_a \right) Q_e}{\lambda(1 - \alpha_{N-1}) \sqrt{\frac{2\pi RT_N}{M}}}.$$

Полученное уравнение также является нелинейным. Для его решения необходимо использовать метод простой итерации.

Проведем дискретизацию нелинейных граничных условий в рамках аппроксимации второго порядка относительно шага по пространственной координате. Предположим, что на границе выполняется уравнение теплопроводности:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Разложим функцию $T(y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $y=0$ до членов второго порядка относительно h :

$$T_2^{n+1} = T_1^{n+1} + h \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{y=0}^{n+1}.$$

Учитывая уравнение теплопроводности $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \right)$, перепишем полученное выражение в виде:

$$T_2^{n+1} = T_1^{n+1} + h \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}^{n+1} + \frac{\rho C h^2}{2\lambda} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{y=0}^{n+1}.$$

Отсюда получим:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}^{n+1} = \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{h} - \frac{\rho C h}{2\lambda} \frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\tau} = -\frac{q}{\lambda} + \frac{A \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_1^{n+1}}\right) - P_a \right) Q_e}{\lambda \sqrt{\frac{2\pi RT_1^{n+1}}{M}}};$$

$$T_2^{n+1} - T_1^{n+1} - \frac{\rho C h^2}{2\lambda \tau} T_1^{n+1} + \frac{\rho C h^2}{2\lambda \tau} T_1^n = -\frac{qh}{\lambda} + \frac{Ah \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_1^{n+1}}\right) - P_a \right) Q_e}{\lambda \sqrt{\frac{2\pi RT_1^{n+1}}{M}}};$$

$$T_1^{n+1} \left(1 + \frac{\rho C h^2}{2\lambda \tau} \right) = T_2^{n+1} + \frac{\rho C h^2}{2\lambda \tau} T_1^n + \frac{qh}{\lambda} - \frac{Ah \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_1^{n+1}}\right) - P_a \right) Q_e}{\lambda \sqrt{\frac{2\pi RT_1^{n+1}}{M}}}.$$

Преобразуем полученное выражение к виду $T_1^{n+1} = \alpha_1 T_2^{n+1} + \beta_1$:

$$T_1^{n+1} = \frac{2\lambda\tau}{\rho Ch^2 + 2\lambda\tau} T_2^{n+1} + \frac{\rho Ch^2 T_1^n + 2\tau qh}{\rho Ch^2 + 2\lambda\tau} - \frac{2\tau Ah \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_1^{n+1}}\right) - P_a \right) Q_e}{(\rho Ch^2 + 2\lambda\tau) \sqrt{\frac{2\pi RT_1^{n+1}}{M}}}.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{2\lambda\tau}{\rho Ch^2 + 2\lambda\tau}; \\ \beta_1 = \frac{\rho Ch^2 T_1^n + 2\tau qh}{\rho Ch^2 + 2\lambda\tau} - \frac{2\tau Ah \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_1^{n+1}}\right) - P_a \right) Q_e}{(\rho Ch^2 + 2\lambda\tau) \sqrt{\frac{2\pi RT_1^{n+1}}{M}}}. \end{array} \right.$$

Для альтернативного варианта записи граничных условий определим значение температуры T_N , используя верхнее граничное условие:

$$T_{N-1}^{n+1} = T_N^{n+1} - h \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=H}^{n+1} + \frac{\rho Ch^2}{2\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{y=H}^{n+1};$$

$$T_{N-1}^{n+1} = T_N^{n+1} - \frac{qh}{\lambda} + \frac{Ah \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_N^{n+1}}\right) - P_a \right) Q_e}{\lambda \sqrt{\frac{2\pi RT_N^{n+1}}{M}}} + \frac{\rho Ch^2}{2\lambda} \frac{T_N^{n+1} - T_N^n}{\tau};$$

Т.к. $T_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} T_N^{n+1} + \beta_{N-1}$, то

$$\alpha_{N-1} T_N^{n+1} + \beta_{N-1} = T_{N-1}^{n+1} - \frac{qh}{\lambda} + \frac{Ah \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_N^{n+1}}\right) - P_a \right) Q_e}{\lambda \sqrt{\frac{2\pi RT_N^{n+1}}{M}}} + \frac{\rho Ch^2}{2\lambda\tau} T_N^{n+1} - \frac{\rho Ch^2}{2\lambda\tau} T_N^n;$$

$$T_N^{n+1} \left(1 - \alpha_{N-1} + \frac{\rho Ch^2}{2\lambda\tau} \right) = \beta_{N-1} + \frac{qh}{\lambda} + \frac{\rho Ch^2}{2\lambda\tau} T_N^n - \frac{Ah \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_N^{n+1}}\right) - P_a \right) Q_e}{\lambda \sqrt{\frac{2\pi RT_N^{n+1}}{M}}};$$

$$T_N^{n+1} = \frac{2\lambda\tau\beta_{N-1} + 2\tau qh + \rho Ch^2 T_N^n}{2\lambda\tau(1 - \alpha_{N-1}) + \rho Ch^2} - \frac{2\tau Ah \left(P_0 \exp\left(-\frac{Q_e}{RT_N^{n+1}}\right) - P_a \right) Q_e}{(2\lambda\tau(1 - \alpha_{N-1}) + \rho Ch^2) \sqrt{\frac{2\pi RT_N^{n+1}}{M}}}.$$

Листинг программы численного решения рассматриваемой задачи (на языке программирования MATLAB).

```
clc; clear all;
```

```
%Ввод данных
```

```
%Теплофизические характеристики жидкого топлива
```

```
lm=0.16;
```

```
p=751;
```

```
Cp=2060;
```

```
M=0.1; %Молекулярная масса жидкого топлива
```

```
%Характеристики процесса испарения
```

```
Aa=0.1;
```

```
Qi=29.4*10^3;
```

```
Po=10^5;
```

```
R=8.31; %Универсальная газовая постоянная
```

```
To=300; %Начальная температура жидкого топлива
```

```
q=10^4; %Плотность теплового потока
```

```
Pa=101325; %Атмосферное давление
```

```
H=0.01; %Толщина пленки
```

```
tk=20; %Время расчета
```

```
N=50; %Количество узлов пространственной разностной сетки
```

```
eps=1/(10^3); %Точность вычислений в рамках метода итерации
```

```
%Характеристика внутренних переменных для MATLAB
```

```
A = zeros(50);
```

```
B = zeros(50);
```

```
C = zeros(50);
```

```
F = zeros(50);
```

```
T = zeros(50);
```

```
Tn = zeros(50);
```

```
Ts = zeros(50);
```

```
a = zeros(50);
```

```
b = zeros(50);
```

```
x = zeros(50);
```

```
%Решение
```

```
%Шаг разностной сетки по пространственной координате
h=H/(N-1);
```

```
%Шаг сетки по времени
dt=tk/1000;
```

```
%Поле температуры в начальный момент времени
for j=1:N
    T(j)=To;
end;
```

```
%Начало отсчета времени
t=0;
```

```
%Цикл с предусловием, прямая прогонка
while t<=tk
```

```
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого граничного
    условия
```

```
    a(1)=2*dt*lm/(2*dt*lm+p*Cp*(h^2));
```

```
    %Запоминание поля температуры на предыдущем шаге по времени (для
    итерационного цикла)
```

```
    for j=1:N
        Tn(j)=T(j);
    end;
    d=0;
```

```
    %Итерационный цикл с постусловием, позволяющий вычислить поле
    температуры вследствие нелинейности в левом граничном условии
```

```
    while abs(d-T(1))>=eps
        d=T(1);
        b(1)=(p*Cp*(h^2)*Tn(1)+2*dt*h*q)/(p*Cp*(h^2)+2*dt*lm)-
        2*dt*Aa*h*Qi*(Po*exp(-Qi/(R*d))-
        Pa)/((2*dt*lm+p*Cp*(h^2))*(2*pi*R*d/M)^(1/2));
```

```
    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов
    for j=2:N-1
```

```
        A(j)=lm/(h^2);
        B(j)=2*lm/(h^2)+p*Cp/dt;
        C(j)=lm/(h^2);
        F(j)=-p*Cp*Tn(j)/dt;
```

```

    %Прогоночные коэффициенты
    a(j)=A(j)/(B(j)-C(j)*a(j-1));
    b(j)=(C(j)*b(j-1)-F(j))/(B(j)-C(j)*a(j-1));
end;

%Итерационный цикл с постусловием, позволяющий вычислить значение температуры на правой границе вследствие нелинейности в этом граничном условии
d1=0;
while abs(d1-T(N))>=eps
    d1=T(N);
    T(N)=To;
end;

%Координата правой границы
y(N)=H;

%Обратная прогонка
while j>=1
    T(j)=a(j)*T(j+1)+b(j);
    y(j)=y(j+1)-h;
    j=j-1;
end;
end;

%Счетчик по времени
t=t+dt;
end;

%Вывод графика
plot(y(1:N),T(1:N))

```

Результаты расчета приведены на рисунке 5.11.

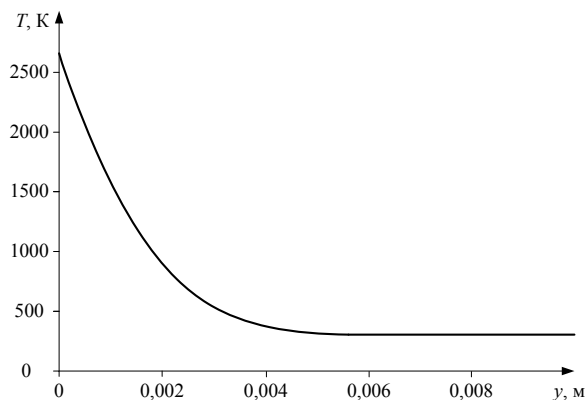


Рис. 5.11. Распределения температуры по толщине пленки жидкого топлива

5.7. Газофазное зажигание слоя диспергированного угля при локальном нагреве

Требуется решить задачу газофазного зажигания слоя диспергированного бурого угля одиночной нагретой до высоких температур металлической частицей (рис. 5.12). Решением являются значение времени задержки зажигания (t_d) твердого натурального топлива, распределения температур и концентраций летучих веществ в области решения задачи.

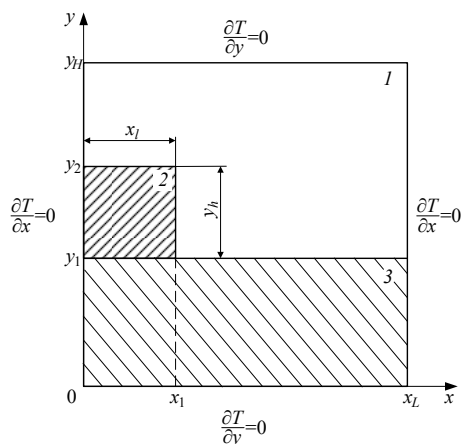


Рис. 5.12. Схема области решения задачи: 1 – воздух (при $t=0$), 2 – стальная частица, 3 – измельченный уголь; размеры: $x_1=0,002$ м, $y_1=0,005$ м, $y_2=0,007$ м

Принята следующая схема процесса. В начальный момент времени стальная частица с температурой T_p , намного превышающей температуру T_0 угля, находится на поверхности диспергированного твердого топлива. В результате кондуктивной теплопередачи происходит прогрев тонкого приповерхностного слоя топлива. С увеличением температуры растет скорость термического разложения угля, выделяются летучие вещества, которые вдуваются в газовую среду в малой окрестности ($x_1 < x < x_1 + 10\Delta x$) основания локального источника энергии. Здесь горючая смесь формируется в результате смешения летучих веществ с окружающим воздухом за счет диффузии. Дополнительный прогрев газовой смеси происходит при ее движении вдоль боковых граней горячей частицы $y_1 < y < y_2$. При достижении условий воспламенения инициируется газозофное зажигание.

С учетом пространственно-временной неоднородности процессов тепло-массопереноса приняты следующие условия зажигания:

1. Теплота, выделяемая в результате реакции окисления летучих веществ, больше энергии, отводимой от разогретой частицы в уголь и газовую смесь.
2. Температура газовой смеси в зоне интенсивного развития реакции окисления превышает температуру локального источника энергии.

Размеры области решения $x_L = 0,02$ м, $y_H = 0,02$ м; размеры стальной частицы $x_l = 0,003$ м, $y_h = 0,003$ м. Теплофизические характеристики веществ и материалов и кинетические параметры процессов приведены в таблице 5.1.

Начальная температура воздуха и угля $T_0 = 300$ К; начальная температура стальной частицы $T_p = 1100$ К. Внешние границы области решения являются адиабатическими. В результате теплоотдачи от локального источника нагрева (стальной частицы) происходит прогрев твердого натурального топлива и воздуха. Для уравнений теплопроводности на границах «частица – уголь», «частица – воздух», «воздух – уголь» заданы граничные условия IV рода. Для уравнения диффузии на границе «воздух – уголь» учитывается вдув летучих продуктов термического разложения твердого топлива в воздух.

Математическая модель исследуемого процесса представлена системой нелинейных (термическое разложение топлива и окисление летучих продуктов в газовой среде) уравнений теплопроводности с соответствующими начальными и граничными условиями IV рода и уравнением диффузии летучих продуктов термического разложения.

Таблица 5.1

Теплофизические характеристики и кинетические параметры

Параметр	Обозначение	Величина
Плотность воздуха	ρ_o	1,161 кг/м ³
Теплоемкость воздуха	C_o	1190 Дж/(кг·К)
Теплопроводность воздуха	λ_o	0,026 Вт/(м·К)
Плотность стали	ρ_2	7831 кг/м ³
Теплоемкость стали	C_2	470 Дж/(кг·К)
Теплопроводность стали	λ_2	49 Вт/(м·К)
Плотность угля	ρ_3	1200 кг/м ³
Теплоемкость угля	C_3	1440 Дж/(кг·К)
Теплопроводность угля	λ_3	0,15 Вт/(м·К)
Плотность продуктов термического разложения угля	ρ_v	0,5 кг/м ³
Теплоемкость продуктов термического разложения угля	C_v	1132 Дж/(кг·К)
Теплопроводность продуктов термического разложения угля	λ_v	0,03 Вт/(м·К)
Тепловой эффект реакции термического разложения угля	Q_3	$2,55 \cdot 10^6$ Дж/кг
Предэкспоненциальный множитель	k_3	10^7 1/с
Энергия активации	E_3	$195 \cdot 10^3$ Дж/моль
Тепловой эффект реакции окисления летучих веществ	Q_1	$5,52 \cdot 10^7$ Дж/кг
Предэкспоненциальный множитель	k_1	10^4 1/с
Энергия активации	E_1	$77 \cdot 10^3$ Дж/моль
Универсальная газовая постоянная	R	8,314 Дж/(моль·К)
Коэффициент диффузии	D_0	$0,56 \cdot 10^{-4}$ м ² /с

Уравнения теплопроводности для смеси летучих веществ с воздухом, стальной частицы и твердого топлива:

при $r_1 < r < r_L$, $z_1 < z < z_2$, $0 < r < r_L$, $z_2 < z < z_H$:

$$\rho_1 C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) + Q_1 \rho_1 \mu_v \mu_o k_1 \exp \left(-\frac{E_1}{RT_1} \right); \quad (50)$$

при $0 < r < r_1$, $z_1 < z < z_2$:

$$\rho_2 C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right); \quad (51)$$

при $0 < r < r_L$, $0 < z < z_1$:

$$\rho_3 C_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \lambda_3 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} \right) - Q_3 \rho_3 k_3 \exp \left(-\frac{E_3}{RT_3} \right). \quad (52)$$

Уравнение диффузии летучих веществ в воздухе при $r_1 < r < r_L$, $z_1 < z < z_2$; $0 < r < r_L$, $z_2 < z < z_H$:

$$\rho_1 \frac{\partial \mu_v}{\partial t} = \rho_1 D_1 \left(\frac{\partial^2 \mu_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu_v}{\partial y^2} \right) - \rho_1 \mu_v \mu_o k_1 \exp \left(-\frac{E_1}{RT_1} \right). \quad (53)$$

Уравнение сохранения концентрации компонентов газовой смеси при $r_1 < r < r_L$, $z_1 < z < z_2$; $0 < r < r_L$, $z_2 < z < z_H$:

$$\mu_v + \mu_o = 1. \quad (54)$$

Уравнение химической кинетики для угля при $0 < r < r_L$, $0 < z < z_1$:

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial t} = (1 - \eta_3) k_3 \exp \left(-\frac{E_3}{RT_3} \right). \quad (55)$$

Теплофизические свойства газовой смеси вычислялись с учетом объемных долей компонентов:

$$\rho_1 = \rho_v \varphi_v + \rho_o \varphi_o, \quad C_1 = C_v \varphi_v + C_o \varphi_o, \quad \lambda_1 = \lambda_v \varphi_v + \lambda_o \varphi_o,$$

$$\varphi_v = \frac{\mu_v / \rho_v}{\mu_v / \rho_v + \mu_o / \rho_o},$$

$$\varphi_v + \varphi_o = 1.$$

Коэффициент диффузии рассчитывался по формуле:

$$D_1 = D_0 \left(\frac{T_1}{273} \right)^{1,7}.$$

Начальные условия:

$$t=0: T_1=T_3=T_0, T_2=T_p, \mu_v=0, \eta_3=0. \quad (56)$$

Граничные условия при $0 < t < t_d$:

$$x=0, 0 < y < y_1; x=x_L, 0 < y < y_1: \quad \frac{\partial T_3}{\partial x} = 0; \quad (57)$$

$$x=0, y_1 < y < y_2: \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0; \quad (58)$$

$$x=0, y_2 < y < y_H; x=x_L, y_1 < y < y_H: \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mu_v}{\partial x} = 0; \quad (59)$$

$$x=x_1, y_1 < y < y_2: \quad -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}, T_2=T_1, \frac{\partial \mu_v}{\partial x} = 0; \quad (60)$$

$$y=0, 0 < x < x_L: \quad \frac{\partial T_3}{\partial y} = 0; \quad (61)$$

$$y=y_1, 0 < x < x_1: \quad -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial y} + Q_3 \rho_3 k_3 \exp\left(-\frac{E_3}{RT_3}\right) \Delta y = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y},$$

$$T_3 = T_2; \quad (62)$$

$$y=y_1, x_1 < x < x_1 + 10\Delta x: \quad -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial y} + Q_3 \rho_3 k_3 \exp\left(-\frac{E_3}{RT_3}\right) \Delta y = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y},$$

$$T_3 = T_1,$$

$$-\rho_1 D_1 \frac{\partial \mu_v}{\partial y} = f(x) \int_{y=0}^{y=y_1} \int_{x=0}^{x=x_1} \rho_3 k_3 \exp\left(-\frac{E_3}{RT_3}\right) dx dy +$$

$$+ \int_{y=0}^{y=y_1} \rho_3 k_3 \exp\left(-\frac{E_3}{RT_3}\right) dy; \quad (63)$$

$$y=y_1, x_1 + 10\Delta x < x < x_L: \quad -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial y} + Q_3 \rho_3 k_3 \exp\left(-\frac{E_3}{RT_3}\right) \Delta y = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y},$$

$$T_3 = T_1,$$

$$-\rho_1 D_1 \frac{\partial \mu_v}{\partial y} = \int_{y=0}^{y=y_1} \rho_3 k_3 \exp\left(-\frac{E_3}{RT_3}\right) dy; \quad (64)$$

$$y=y_2, 0 < x < x_1: \quad -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}, T_2 = T_1, \frac{\partial \mu_v}{\partial y} = 0; \quad (65)$$

$$y=y_H, 0 < x < x_L: \quad \frac{\partial T_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial \mu_v}{\partial y} = 0. \quad (66)$$

Здесь на границах «частица – уголь» и «газ – уголь» для уравнений теплопроводности заданы условия (см. (62)–(64)) идеального теплового контакта при учете эндотермического процесса термического разложения твердого топлива (слагаемое $Q_3 \rho_3 k_3 \exp(-E_3 / RT_3) \Delta y$). Граничное условие (63) для уравнения диффузии описывает поток массы за счет неравномерного (согласно функции $f(x)$) распределения вдуваемых в окрестности основания горячей частицы продуктов термического разложения в воздух, выделяющихся в области под локальным источником. При удалении от частицы (в направлении оси x) на расстояние более $10\Delta x$ граничное условие (64) описывает поток массы за счет вдува продуктов термического разложения угля в воздух только из этой области (при отсутствии вдува летучих веществ в газовую среду, выделяющихся под источником). Графическая иллюстрация процесса выхода летучих веществ приведена на рисунке

5.13.

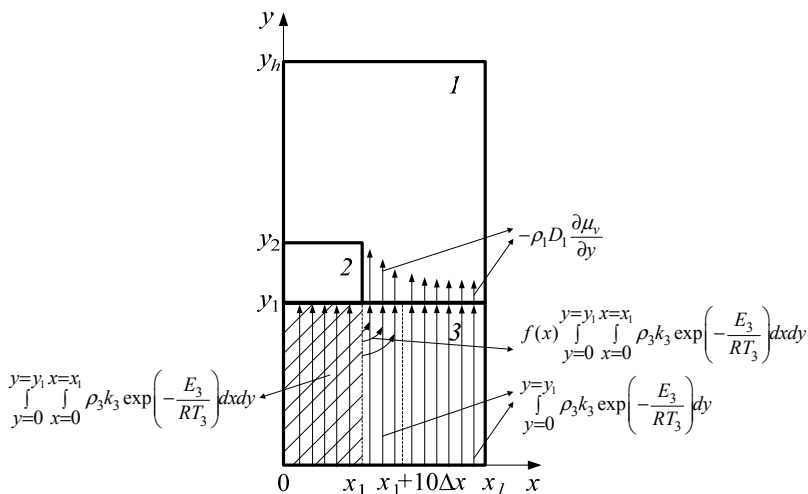


Рис. 5.13. Условная схема выхода летучих продуктов термического разложения угля при локальном нагреве: 1 – смесь летучих веществ с воздухом, 2 – стальная частица, 3 – уголь

Система уравнений (50)–(55) с начальными (56) и граничными (57)–(66) условиями решается методом конечных разностей, разностные аналоги дифференциальных уравнений – локально-одномерным методом, одномерные разностные уравнения – методом прогонки с использованием неявной четырехточечной разностной схемы. Для решения нелинейных уравнений необходимо воспользоваться методом простой итерации.

Алгоритм решения рассматриваемой задачи состоит в следующем. Сначала выполняется первый полушаги по времени – в результате прямой и обратной прогонки в направлении оси x определяются поля температуры и концентрации летучих веществ на промежуточном временном слое. Далее вновь реализуется метод прогонки в направлении оси y на втором полушаге по времени, что позволяет установить поля температуры в области решения задачи и концентрации летучих веществ в газовой среде на целом шаге по времени.

При реализации метода прогонки как в направлении оси x , так и y расчетная область (рис. 5.13 и 5.14) разбивается на группу элементарных областей. На первом полушаге по времени последовательно рассматриваются следующие области: $0 < y < y_1$, $0 < x < x_L$; $y_1 < y < y_2$, $0 < x < x_L$; $y_2 < y < y_h$, $0 < x < x_L$. На

втором полушаге по времени также последовательно рассматриваются области: $0 < x < x_1$, $0 < y < y_H$; $x_1 < x < x_L$, $0 < y < y_H$.

Листинг программы численного решения рассматриваемой задачи (на языке программирования MATLAB).

```
clc; clear all;
```

```
%Ввод данных
```

```
%Теплофизические характеристики стали
```

```
lm2=49;
```

```
p2=7831;
```

```
Cp2=470;
```

```
%Теплофизические характеристики угля
```

```
lm3=0.15;
```

```
p3=1200;
```

```
Cp3=1440;
```

```
%Теплофизические характеристики газообразных продуктов термической  
деструкции угля
```

```
lm4=0.03;
```

```
p4=0.5;
```

```
Cp4=1132;
```

```
%Теплофизические характеристики воздуха
```

```
lm5=0.026;
```

```
p5=1.161;
```

```
Cp5=1190;
```

```
%Кинетические характеристики окисления смеси продуктов термической  
деструкции угля с окислителем
```

```
Ea1=77*(10^3);
```

```
k01=10^4;
```

```
Q1=5.52*(10^7);
```

```
%Кинетические характеристики термического разложения угля
```

```
Ea3=195*(10^3);
```

```
k03=10^7;
```

```
Q3=2.55*(10^6);
```

```
%Универсальная газовая постоянная
```

R=8.31;

%Доля угля, способная к термическому разложению
ftr3n=1;

Tr=1100; %Начальная температура горячей частицы
To=300; %Начальная температура твердого топлива и воздуха
Tt=600; %Температура интенсификации термической деструкции угля

%Размеры области решения
L=0.02;
H=0.02;

%Максимальное время расчета программы
tk=3;

%Общее количество шагов
Nx=400;
Ny=400;

%Номера шагов для границ горячей частицы
nx1=60;
ny1=100;
ny2=160;

ee=1; %Точность вычислений температуры в рамках метода итерации

%Характеристика внутренних переменных для MATLAB

A = zeros(400);
B = zeros(400);
C = zeros(400);
F = zeros(400);
Ac = zeros(400);
Bc = zeros(400);
Cc = zeros(400);
Fc = zeros(400);
a = zeros(400,400);
b = zeros(400,400);
ac = zeros(400,400);
bbc = zeros(400,400);
T = zeros(400,400);
T1 = zeros(400,400);
Mug = zeros(400,400);
Muo = zeros(400,400);


```

D = zeros(400,400);
W1 = zeros(400,400);
ftr3 = zeros(400,400);
ftr3s = zeros(400,400);
dftr3 = zeros(400,400);
WgasSUM = zeros(400,400);
WgasSUM2 = zeros(400,400);
fi4 = zeros(400,400);
fi5 = zeros(400,400);
lm1 = zeros(400,400);
Cp1 = zeros(400,400);
p1 = zeros(400,400);
aa1 = zeros(400,400);
arr = zeros(400,400);
x = zeros(400);
y = zeros(400);

```

```
%Решение
```

```
%Шаги сетки по пространственным координатам
```

```
hx=L/(Nx-1);
```

```
hy=H/(Ny-1);
```

```
%Шаг сетки по времени
```

```
dt=10^(-4);
```

```
%Поле температуры и концентраций в начальный момент времени в области решения задачи
```

```
for i=1:Nx
```

```
    for j=1:Ny
```

```
        T(i,j)=To;
```

```
        Mug(i,j)=0;
```

```
        Muo(i,j)=1;
```

```
    end;
```

```
end;
```

```
%Температура горячей частицы
```

```
for i=1:nx1
```

```
    for j=ny1+1:ny2
```

```
        T(i,j)=Tp;
```

```
        Muo(i,j)=0;
```

```
    end;
```

```
    T(i,ny1)=(lm3*T(i,ny1-1)+lm2*T(i,ny1+1))/(lm3+lm2);
```

```
end;
```

%Начальное распределение объемных долей компонентов угля, подвер-
женных термическому разложению

for i=1:Nx

for j=1:ny1-1

ft3(i,j)=ft3n;

ft3s(i,j)=0;

dft3(i,j)=0;

Muo(i,j)=0;

end;

ft3s(i,ny1)=0;

WgasSP=0;

WgasSUM(i,ny1)=0;

end;

%Начало отсчета времени

t=0;

%Вспомогательные переменные

maxt=0;

Trmax=0;

%Цикл с предусловием

while ((t<=tk)&&(maxt==0))

%Расчет теплофизических характеристик газовой смеси

for i=1:Nx

for j=1:Ny

%Коэффициент диффузии продуктов термического разложения уг-
ля в воздухе

$D(i,j)=0.56*((T(i,j)/273)^{1.7})*10^{(-4)};$

%Объемные доли компонентов газовой смеси

$fi4(i,j)=(Mug(i,j)/p4)/((Mu0(i,j)/p5)+(Mug(i,j)/p4));$

$fi5(i,j)=1-fi4(i,j);$

%Теплофизические характеристики газовой смеси

$lm1(i,j)=lm5*fi5(i,j)+lm4*fi4(i,j);$

$Cp1(i,j)=Cp5*fi5(i,j)+Cp4*fi4(i,j);$

$p1(i,j)=p5*fi5(i,j)+p4*fi4(i,j);$

%Коэффициент температуропроводности газовой смеси

$aa1(i,j)=lm1(i,j)/(p1(i,j)*Cp1(i,j));$

%Коэффициент температуропроводности стали

```

aa2=lm2/(p2*Cr2);
%Коэффициент температуропроводности угля
aa3=lm3/(p3*Cr3);
end;
end;

%*****
%Решение уравнений теплопроводности

%*****
%Первый полушаг по времени

%*****

%Реализация итераций на первом полушаге по времени
k=1;
%Запоминание поля температуры на предыдущем шаге по времени
T1(1:Nx,1:Ny,k)=T(1:Nx,1:Ny);
flag_eps=1;
while ((flag_eps)&&(k<1000))

    %Однородная область (твердое топливо)
    for j=1:ny1-1
        %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранич-
ного условия
        a(1,j)=1;
        b(1,j)=0;

        %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для твердого топлива
        for i=2:Nx-1
            %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей
            A(i)=lm3/(hx^2);
            B(i)=2*lm3/(hx^2)+p3*Cr3/dt;
            C(i)=lm3/(hx^2);
            %Проверка условия термического разложения твердого топлива
            if T(i,j)<Tt
                F(i)=-p3*Cr3*T(i,j)/dt;
            else
                F(i)=-p3*Cr3*T(i,j)/dt+p3*Q3*k03*fr3(i,j)*exp(-
Ea3/(R*T1(i,j,k)))/2;
            %Расчет выгорания твердого топлива

```

```

    dfr3(i,j)=k03*ftr3(i,j)*exp(-Ea3/(R*T1(i,j,k)))*dt/2;
    ftr3(i,j)=ftr3(i,j)-dfr3(i,j);
    if ftr3(i,j)<0
        ftr3(i,j)=0;
    end;
end;

%Прогоночные коэффициенты
a(i,j)=A(i)/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
end;
end;

%Неоднородная область (стальная частица - воздух)
for j=ny1:ny2
    a(1,j)=1;
    b(1,j)=0;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
    ниям (28) для стальной частицы
    for i=2:nx1-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
        гональной матрицей
        A(i)=lm2/(hx^2);
        B(i)=2*lm2/(hx^2)+p2*Cp2/dt;
        C(i)=lm2/(hx^2);
        F(i)=-p2*Cp2*T(i,j)/dt;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(i)/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
        b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
    end;

    %Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV
    рода
    a(nx1,j)=2*aa2*aa1(nx1+1,j)*dt*lm1(nx1+1,j)/(2*aa2*aa1(nx1+1,j)*dt*
    (lm1(nx1+1,j)+lm2*(1-a(nx1-1,j)))+(hx^2)*(aa2*lm1(nx1+1,j)+aa1(nx1+1,j)*
    lm2));
    b(nx1,j)=(2*aa2*aa1(nx1+1,j)*dt*lm2*b(nx1-1,j)+(hx^2)*
    (aa2*lm1(nx1+1,j)+aa1(nx1+1,j)*lm2)*T(nx1,j))/(2*aa2*aa1(nx1+1,j)*dt*
    (lm1(nx1+1,j)+lm2*(1-a(nx1-1,j)))+(hx^2)*(aa2*lm1(nx1+1,j)+aa1(nx1+1,j)*
    lm2));

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-

```

```

ням (28) для воздуха
for i=nx1+1:Nx-1
    %Скорость реакции окисления летучих веществ
    W1(i,j)=k01*(1-Mug(i,j))*Mug(i,j)*exp(-Ea1/(R*T1(i,j,k)));

    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей
    A(i)=lm1(i,j)/(hx^2);
    B(i)=2*lm1(i,j)/(hx^2)+p1(i,j)*Cp1(i,j)/dt;
    C(i)=lm1(i,j)/(hx^2);
    F(i)=-p1(i,j)*Cp1(i,j)*T(i,j)/dt-p1(i,j)*Q1*W1(i,j)/2;

    %Прогоночные коэффициенты
    a(i,j)=A(i)/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
    b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
end;
end;

%Однородная область (воздух)
for j=ny2+1:Ny
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранич-
ного условия
    a(1,j)=1;
    b(1,j)=0;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
ням (28) для воздуха
    for i=2:Nx-1
        %Скорость реакции окисления летучих веществ
        W1(i,j)=k01*(1-Mug(i,j))*Mug(i,j)*exp(-Ea1/(R*T1(i,j,k)));

        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей
        A(i)=lm1(i,j)/(hx^2);
        B(i)=2*lm1(i,j)/(hx^2)+p1(i,j)*Cp1(i,j)/dt;
        C(i)=lm1(i,j)/(hx^2);
        F(i)=-p1(i,j)*Cp1(i,j)*T(i,j)/dt-p1(i,j)*Q1*W1(i,j)/2;

        %Прогоночные коэффициенты
        a(i,j)=A(i)/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
        b(i,j)=(C(i)*b(i-1,j)-F(i))/(B(i)-a(i-1,j)*C(i));
    end;
end;

```

```

%Текущая координата
x(Nx)=L;

%Обратная прогонка
for j=1:Ny
    %Значение температуры на правой границе
    T1(Nx,j,k+1)=b(Nx-1,j)/(1-a(Nx-1,j));
    i=Nx-1;
    while i>=1
        T1(i,j,k+1)=a(i,j)*T1(i+1,j,k+1)+b(i,j);
        x(i)=x(i+1)-hx;
        i=i-1;
    end;
end;

%Проверка сходимости итерационного метода
flag_eps=0;
nmr=1;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        %Определение модуля разности температур на данной и преды-
        дущей итерациях
        arr(nmr)=abs(T1(i,j,k+1)-T1(i,j,k));
        if (arr(nmr)>=eet)
            flag_eps=1;
        end
        nmr=nmr+1;
    end
end
max_err=max(arr);
min_err=min(arr);
k=k+1;
end;
T(1:Nx,1:Ny)=T1(1:Nx,1:Ny,k);

%*****
%Второй полушаг по времени

%*****

%Реализация метода итерации на втором полушаге по времени
k=1;
%Запоминание поля температуры на предыдущем шаге по времени

```

```

T1(1:Nx,1:Ny,k)=T(1:Nx,1:Ny);
flag_eps=1;
while ((flag_eps)&&(k<1000))

%*****

%Расчет скорости термического разложения твердого топлива

%*****

%Суммарная (по X и по Y) скорость термического разложения угля
под стальной частицей
for i=1:nx1
    WgasSP=WgasSP+WgasSUM(i,ny1);
end;

ksp2=1.05;
for i=nx1+1:nx1+10
    ksp2=ksp2-0.1;
    WgasSUM2(i,ny1)=WgasSUM(i,ny1)+WgasSP*(ksp2)/5;
end;

%*****

%Продолжение решения уравнений теплопроводности

%*****

%Неоднородная область (твердое топливо - стальная частица - воздух)
for i=1:nx1
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего граничного условия
    a(i,1)=1;
    b(i,1)=0;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выражениям (28) для твердого топлива
    for j=2:ny1-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиагональной матрицей
        A(j)=lm3/(hy^2);
        B(j)=2*lm3/(hy^2)+p3*Cp3/dt;
        C(j)=lm3/(hy^2);
        %Проверка условия термического разложения угля
        if T(i,j)<Tt

```

```

        F(j)=-p3*Cp3*T(i,j)/dt;
    else
        F(j)=-p3*Cp3*T(i,j)/dt+p3*Q3*k03*ftr3(i,j)*
exp(-Ea3/(R*T1(i,j,k)))/2;
        %Расчет выгорания угля
        dfr3(i,j)=k03*ftr3(i,j)*exp(-Ea3/(R*T1(i,j,k)))*dt/2;
        %Остаток невыгоревшей части угля
        ftr3(i,j)=ftr3(i,j)-dfr3(i,j);
        if ftr3(i,j)<0
            ftr3(i,j)=0;
        end;
        %Летучие вещества на границе твердое топливо - воздух
        ftr3s(i,ny1)=ftr3s(i,ny1)+2*dfr3(i,j);
        if ftr3s(i,j)>1
            ftr3s(i,j)=1;
        end;
        WgasSUM(i,ny1)=k03*ftr3s(i,ny1)*exp(-Ea3/(R*T1(i,ny1-1,k)));
    end;

    %Прогоночные коэффициенты
    a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV
рода
    a(i,ny1)=2*aa3*aa2*dt*lm2/(2*aa3*aa2*dt*(lm2+lm3*(1-a(i,ny1-1)))+(
(hy^2)*(aa3*lm2+aa2*lm3));
    b(i,ny1)=(2*aa3*aa2*dt*lm3*b(i,ny1-1)+(hy^2)*(aa3*lm2+aa2*lm3)*
T(i,ny1))/(2*aa3*aa2*dt*(lm2+lm3*(1-a(i,ny1-1)))+(
(hy^2)*(aa3*lm2+aa2*lm3));

    %Цикл для определения прогонных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для стальной частицы
    for j=ny1+1:ny2-1
        A(j)=lm2/(hy^2);
        B(j)=2*lm2/(hy^2)+p2*Cp2/dt;
        C(j)=lm2/(hy^2);
        F(j)=-p2*Cp2*T(i,j)/dt;

        a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
        b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    end;

```



```

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV
рода
a(i,ny2)=2*aa2*aa1(i,ny2+1)*dt*lm1(i,ny2+1)/(2*aa2*aa1(i,ny2+1)*dt*
(lm1(i,ny2+1)+lm2*(1-a(i,ny2-1)))+(hy^2)*(aa2*lm1(i,ny2+1)+aa1(i,ny2+1)*
lm2));
b(i,ny2)=(2*aa2*aa1(i,ny2+1)*dt*lm2*b(i,ny2-1)+(hy^2)*
(aa2*lm1(i,ny2+1)+aa1(i,ny2+1)*lm2)*T(i,ny2))/(2*aa2*aa1(i,ny2+1)*dt*
(lm1(i,ny2+1)+lm2*(1-a(i,ny2-1)))+(hy^2)*(aa2*lm1(i,ny2+1)+
aa1(i,ny2+1)*lm2));

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для воздуха
for j=(ny2+1):Ny-1
    %Скорость реакции окисления летучих веществ
    W1(i,j)=k01*(1-Mug(i,j))*Mug(i,j)*exp(-Ea1/(R*T1(i,j,k)));

    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
    гональной матрицей
    A(j)=lm1(i,j)/(hy^2);
    B(j)=2*lm1(i,j)/(hy^2)+p1(i,j)*Cp1(i,j)/dt;
    C(j)=lm1(i,j)/(hy^2);
    F(j)=-p1(i,j)*Cp1(i,j)*T(i,j)/dt-p1(i,j)*Q1*W1(i,j)/2;

    %Прогоночные коэффициенты
    a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
    b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;
end;

%Неоднородная область (твердое топливо - воздух)
for i=nx1+1:Nx
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего гра-
    ничного условия
    a(i,1)=1;
    b(i,1)=0;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов по выраже-
    ниям (28) для твердого топлива
    for j=2:ny1-1
        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
        гональной матрицей
        A(j)=lm3/(hy^2);
        B(j)=2*lm3/(hy^2)+p3*Cp3/dt;
        C(j)=lm3/(hy^2);
    end
end

```

```

%Проверка условия термического разложения угля
if T(i,j)<Tt
    F(j)=-p3*Ср3*T(i,j)/dt;
else
    F(j)=-p3*Ср3*T(i,j)/dt+p3*Q3*k03*ftr3(i,j)*
exp(-Ea3/(R*T1(i,j,k)))/2;
    %Расчет выгорания угля
    dfr3(i,j)=k03*ftr3(i,j)*exp(-Ea3/(R*T1(i,j,k)))*dt/2;
    %Остаток невыгоревшей части угля
    ftr3(i,j)=ftr3(i,j)-dfr3(i,j);
    if ftr3(i,j)<0
        ftr3(i,j)=0;
    end;
    %Летучие вещества на границе твердое топливо - воздух
    ftr3s(i,ny1)=ftr3s(i,ny1)+2*dfr3(i,j);
    if ftr3s(i,j)>1
        ftr3s(i,j)=1;
    end;
    WgasSUM(i,ny1)=k03*ftr3s(i,ny1)*exp(-Ea3/(R*T1(i,ny1-1,k)));
end;

```

```

%Прогоночные коэффициенты
a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;

```

```

%Прогоночные коэффициенты на основе граничного условия IV
рода

```

```

a(i,ny1)=2*aa3*aa1(i,ny1)*dt*lm1(i,ny1)/(2*aa3*aa1(i,ny1)*dt*
(lm1(i,ny1)+lm3*(1-a(i,ny1-1)))+(hy^2)*(aa3*lm1(i,ny1)+aa1(i,ny1)*lm3));
b(i,ny1)=(2*aa3*aa1(i,ny1)*dt*lm3*b(i,ny1-1)+
(hy^2)*(aa3*lm1(i,ny1)+aa1(i,ny1)*lm3)*T(i,ny1))/
(2*aa3*aa1(i,ny1)*dt*(lm1(i,ny1)+lm3*(1-a(i,ny1-1)))+
(hy^2)*(aa3*lm1(i,ny1)+aa1(i,ny1)*lm3));

```

```

%Цикл для определения прогонных коэффициентов по выраже-
ниям (28) для воздуха

```

```

for j=ny1+1:Ny-1
    %Скорость реакции окисления летучих веществ
    W1(i,j)=k01*(1-Mug(i,j))*Mug(i,j)*exp(-Ea1/(R*T1(i,j,k)));

```

```

%Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиа-
гональной матрицей

```

```

A(j)=lm1(i,j)/(hy^2);

```

```

B(j)=2*lm1(i,j)/(hy^2)+p1(i,j)*Cp1(i,j)/dt;
C(j)=lm1(i,j)/(hy^2);
F(j)=-p1(i,j)*Cp1(i,j)*T(i,j)/dt-p1(i,j)*Q1*W1(i,j)/2;

%Прогоночные коэффициенты
a(i,j)=A(j)/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
b(i,j)=(C(j)*b(i,j-1)-F(j))/(B(j)-a(i,j-1)*C(j));
end;
end;

%Текущая координата
y(Ny)=H;

%Обратная прогонка
for i=1:Nx
    %Значение температуры на верхней границе
    T1(i,Ny,k+1)=b(i,Ny-1)/(1-a(i,Ny-1));
    j=Ny-1;
    while j>=1
        T1(i,j,k+1)=a(i,j)*T1(i,j+1,k+1)+b(i,j);
        y(j)=y(j+1)-hy;
        j=j-1;
    end;
end;

%Проверка сходимости итерационного метода
flag_eps=0;
nmr=1;
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        %Определение модуля разности температур на данной и преды-
        дущей итерациях
        arr(nmr)=abs(T1(i,j,k+1)-T1(i,j,k));
        if (arr(nmr)>=eet)
            flag_eps=1;
        end
        nmr=nmr+1;
    end
end
max_err=max(arr);
min_err=min(arr);
k=k+1;
end;
kt=k;

```

```

T(1:Nx,1:Ny)=Tl(1:Nx,1:Ny,k);

%*****
%Решение уравнения диффузии летучих веществ

%*****
%Первый полушаг по времени

%*****

for i=1:nx1
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего гранич-
ного условия
    ac(i,ny2)=1;
    bbc(i,ny2)=0;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов
    for j=ny2+1:Ny-1
        %Скорость реакции окисления летучих веществ
        Wl(i,j)=k01*(1-Mug(i,j))*Mug(i,j)*exp(-Ea1/(R*T(i,j)));

        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        Ac(j)=p1(i,j)*D(i,j)/(hy^2);
        Bc(j)=2*p1(i,j)*D(i,j)/(hy^2)+p1(i,j)/dt;
        Cc(j)=p1(i,j)*D(i,j)/(hy^2);
        Fc(j)=-p1(i,j)*Mug(i,j)/dt+p1(i,j)*Wl(i,j)/2;

        %Прогоночные коэффициенты
        ac(i,j)=Ac(j)/(Bc(j)-ac(i,j-1)*Cc(j));
        bbc(i,j)=(Cc(j)*bbc(i,j-1)-Fc(j))/(Bc(j)-ac(i,j-1)*Cc(j));
    end;
end;

for i=nx1+1:Nx
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе нижнего гранич-
ного условия
    ac(i,ny1)=1;
    if ((i>=(nx1+1))&&(i<=(nx1+10)))
        bbc(i,ny1)=(p1(i,ny1)*WgasSUM2(i,ny1)*hx)/(p1(i,ny1)*D(i,ny1));%В
окрестности 10 шагов от основания стальной частицы в направлении оси x
учитывается дополнительный выход летучих веществ, выделяющихся под
стальной частицей

```

```

else

bbc(i,ny1)=(p1(i,ny1)*WgasSUM(i,ny1)*hx)/(p1(i,ny1)*D(i,ny1));%При пре-
вышении 10 шагов от основания стальной частицы в направлении оси x
отсутствует дополнительный выход летучих веществ, выделяющихся под
стальной частицей
end;

%Цикл для определения прогоночных коэффициентов
for j=ny1+1:Ny-1
    %Скорость реакции окисления летучих веществ
    W1(i,j)=k01*(1-Mug(i,j))*Mug(i,j)*exp(-Ea1/(R*T(i,j)));

    %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
    нальной матрицей
    Ac(j)=p1(i,j)*D(i,j)/(hy^2);
    Bc(j)=2*p1(i,j)*D(i,j)/(hy^2)+p1(i,j)/dt;
    Cc(j)=p1(i,j)*D(i,j)/(hy^2);
    Fc(j)=-p1(i,j)*Mug(i,j)/dt+p1(i,j)*W1(i,j)/2;

    %Прогоночные коэффициенты
    ac(i,j)=Ac(j)/(Bc(j)-ac(i,j-1)*Cc(j));
    bbc(i,j)=(Cc(j)*bbc(i,j-1)-Fc(j))/(Bc(j)-ac(i,j-1)*Cc(j));
end;
end;

%Условие отсутствия летучих веществ в областях, характерных для
стальной частицы и твердого топлива
for i=1:nx1
    for j=ny1:ny2-1
        ac(i,j)=0;
        bbc(i,j)=0;
    end;
end;

for i=1:Nx
    for j=1:ny1-1
        ac(i,j)=0;
        bbc(i,j)=0;
    end;
end;

%Текущая координата
y(Ny)=H;

```

```

%Обратная прогонка
for i=1:Nx
    %Значение концентрации летучих веществ на верхней границе
    Mug(i,Ny)=bbc(i,Ny-1)/(1-ac(i,Ny-1));
    j=Ny-1;
    while j>=1
        Mug(i,j)=(ac(i,j)*Mug(i,j+1)+bbc(i,j));
        y(j)=y(j+1)-hy;
        j=j-1;
    end;
end;

%*****
%Второй полушаг по времени
%*****

for j=ny1:ny2
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранично-
    го условия
    ac(nx1,j)=1;
    bbc(nx1,j)=0;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов
    for i=nx1+1:Nx-1
        %Скорость реакции окисления летучих веществ
        W1(i,j)=k01*(1-Mug(i,j))*Mug(i,j)*exp(-Ea1/(R*T(i,j)));

        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
        нальной матрицей
        Ac(i)=p1(i,j)*D(i,j)/(hx^2);
        Bc(i)=2*p1(i,j)*D(i,j)/(hx^2)+p1(i,j)/dt;
        Cc(i)=p1(i,j)*D(i,j)/(hx^2);
        Fc(i)=-p1(i,j)*Mug(i,j)/dt+p1(i,j)*W1(i,j)/2;

        %Прогоночные коэффициенты
        ac(i,j)=Ac(i)/(Bc(i)-ac(i-1,j)*Cc(i));
        bbc(i,j)=(Cc(i)*bbc(i-1,j)-Fc(i))/(Bc(i)-ac(i-1,j)*Cc(i));
    end;
end;

%Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого граничного

```

```

условия
for j=ny2+1:Ny
    %Начальные прогоночные коэффициенты на основе левого гранично-
го условия
    ac(1,j)=1;
    bbc(1,j)=0;

    %Цикл для определения прогоночных коэффициентов
    for i=2:Nx-1
        %Скорость химической реакции
        W1(i,j)=k01*(1-Mug(i,j))*Mug(i,j)*exp(-Ea1/(R*T(i,j)));

        %Коэффициенты канонического представления СЛАУ с трехдиаго-
нальной матрицей
        Ac(i)=p1(i,j)*D(i,j)/(hx^2);
        Bc(i)=2*p1(i,j)*D(i,j)/(hx^2)+p1(i,j)/dt;
        Cc(i)=p1(i,j)*D(i,j)/(hx^2);
        Fc(i)=-p1(i,j)*Mug(i,j)/dt+p1(i,j)*W1(i,j)/2;

        %Прогоночные коэффициенты
        ac(i,j)=Ac(i)/(Bc(i)-ac(i-1,j)*Cc(i));
        bbc(i,j)=(Cc(i)*bbc(i-1,j)-Fc(i))/(Bc(i)-ac(i-1,j)*Cc(i));
    end;
end;

%Условие отсутствия летучих веществ в областях, характерных для
стальной частицы и твердого топлива
for i=1:nx1-1
    for j=ny1:ny2-1
        ac(i,j)=0;
        bbc(i,j)=0;
    end;
end;
for i=1:Nx
    for j=1:ny1-1
        ac(i,j)=0;
        bbc(i,j)=0;
    end;
end;

%Текущая координата
x(Nx)=L;

%Обратная прогонка

```

```

for j=1:Ny
    %Значение концентрации на правой границе
    Mug(Nx,j)=bbc(Nx-1,j)/(1-ac(Nx-1,j));
    i=Nx-1;
    while i>=1
        Mug(i,j)=(ac(i,j)*Mug(i+1,j)+bbc(i,j));
        x(i)=x(i+1)-hx;
        i=i-1;
    end;
end;

%Проверка условий зажигания
Tmax=0;
Mugmax=0;

for i=1:Nx
    for j=ny1:Ny
        if T(i,j)>Tmax
            Tmax=T(i,j);
            imax=i;
            jmax=j;
        end;

        if Mug(i,j)>Mugmax
            Mugmax=Mug(i,j);
            icmax=i;
            jcmax=j;
        end;
    end;
end;
dTmax=Tmax-Tprmax;
if ((t>10*dt)&&(dTmax>10))
    maxt=1;
end;

Tprmax=Tmax;

%Счетчик по времени
t=t+dt;
end;

%Построение изотерм
figure(1);
[~,~]=contour(y(1:Ny),x(1:Nx),T(1:Nx,1:Ny));

```


%Построение изолиний концентрации летучих веществ
figure(2);
[C,h]=contour(y(1:Ny),x(1:Nx),Mug(1:Nx,1:Ny));

В условиях рассматриваемой задачи время задержки зажигания угля $t_d=2,35$ с. Изотермы и изолинии концентрации в области решения задачи приведены на рисунке 5.14.

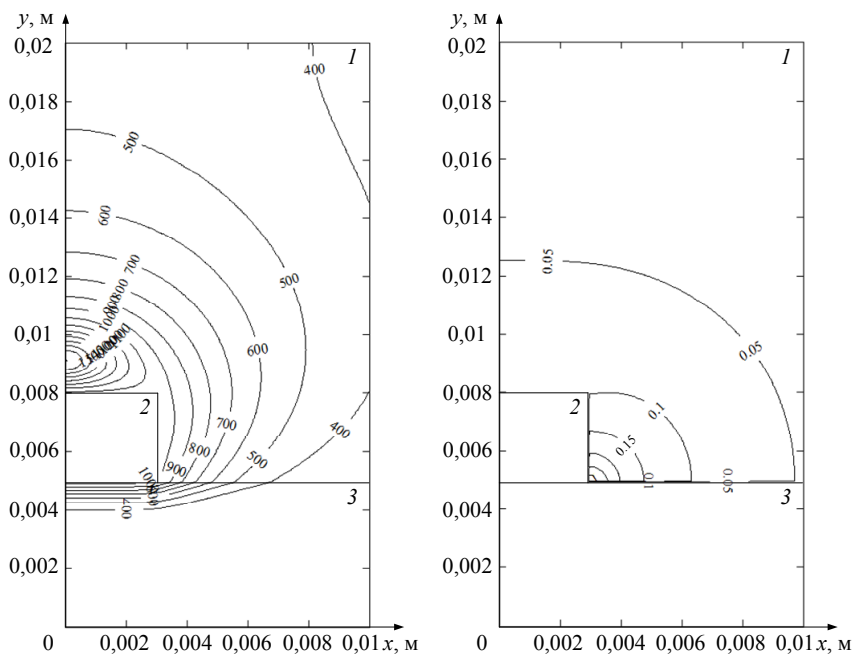


Рис. 5.14. Изотермы (T , К) (а) и изолинии концентрации (μ_v) (б) в области решения задачи в момент зажигания: I – смесь летучих веществ с воздухом, 2 – стальная частица, 3 – уголь

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М. : Наука, 1966. – 664 с.
2. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
5. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М. : Наука, 1970. – 192 с.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1981. – 512 с.
7. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Дифференциальные уравнения. – М. : Физматлит, 2002. – 160 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М. : Интеграл-Пресс, 2004. – Т.2. – 544 с.
9. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплаины в вычислительной математике. – М. : Наука, 1976. – 230 с.
10. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. – М. : Радио и связь, 1985. – 303 с.
11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1983. – 393 с.
12. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М. : УРСС, 2000. – 424 с.
13. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М. : Физматлит, 2005. – 256 с.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
15. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
16. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М. : Высшая школа, 2002. – 840 с.
17. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М. : Наука, 1977. – 656 с.
18. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.

19. Берковский Б.М., Ноготов Е.Ф. Разностные методы исследования задач теплообмена. – Минск : Наука и техника, 1976. – 141 с.
20. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 782 с.
21. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. – М. : Мир, 1988. – 544 с.
22. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М. : Наука, 1962. – Т. 1. – 464 с.
23. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М. : Наука, 1962. – Т. 2. – 639 с.
24. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. – М. : Наука, 1976. – Т. 1. – 302 с.
25. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М. : Наука, 1987. – 598 с.
26. Волков Е.А. Численные методы. – М. : Наука, 1987. – 248 с.
27. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М. : Наука, 1987. – 318 с.
28. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1966. – 444 с.
29. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М. : Физматлит, 2005. – 256 с.
30. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.
31. Сенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
32. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
33. Норри Д., Де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
34. Yamada E., Ota T. Effective thermal conductivity of dispersed materials // *Warme- und Stoffübertragung*. – 1980. – Vol. 13, No. 1, 2. – P. 27–37.
35. Чудновский А.Ф. Теплофизические характеристики дисперсных материалов. – М. : Физматгиз, 1962. – 456 с.
36. Шашков А.Г., Волхов Г.М., Абраменков Т.Н., Козлов В.П. Методы определения теплопроводности и температуропроводности. – М. :

Энергия, 1973. – 336 с.

37. Farouki O.T. Thermal properties of solids. – USA, Hanover : New Hampshire, 1981. – 150 p.
38. Factorial design approach applied to electrically and thermally conductive nylon 6,6 / J.A. King, K.W. Tucker, J.D. Meyers et al. // Polymer Composites. – 2001. – Vol. 22, No. 1. – P. 142–154.
39. Progelhof R.C., Throne J.L., Ruetsch R.R. Methods of predicting the thermal conductivity of composite systems : a review // Polymer Engineering and Science. – 1976. – Vol. 16, No. 9. – P. 615–625.
40. Bigg D.M. Thermal conductivity of heterophase polymer compositions // Advances in Polymer Science. – 1995. – Vol. 119. – P. 1–30.
41. Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций. – М. : Мир, 1968. – 464 с.
42. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. – 3rd edition. – UK, Oxford : Clarendon Press, 1904. – Vol. 1. – 440 p.
43. Behrens E. Thermal conductivities of composite materials // Journal of Composite Materials. – 1968. – Vol. 2, No. 1. – P. 2–17.
44. Менсон Дж., Сперлинг Л. Полимерные смеси и композиты / под ред. Ю.К. Годовского ; пер. с англ. – М. : Химия, 1979. – 440 с.
45. Gao L. Maxwell–Garnett type approximation for nonlinear composites with shape distribution // Physical Letters A. – 2003. – Vol. 309. – P. 435–442.
46. Sundstrom D., Chen S.Y. Thermal conductivity of reinforced plastics // Journal of Composite Materials. – 1970. – Vol. 4, No. 1. – P. 113–117.
47. Bruggeman D.A.G. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen // Annals of Physics. – 1935. – Vol. 24. – P. 636–679.
48. Lord Rayleigh J.W. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium // Philosophical Magazine. – 1892. – Vol. 34. – P. 481–502.
49. Milton G.W. The theory of composites. – New York : Cambridge University Press, 2004. – 749 p.
50. Meredith R.E., Tobias C.W. Conductivity of emulsions // Journal of the Electrochemical Society. – 1961. – Vol. 103. – P. 286–290.
51. Tsao G.T. Thermal conductivity of two phase materials // Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals. – 1961. – Vol. 53. – P. 395–397.
52. Cheng S.C., Vachon R.I. The prediction of thermal conductivity of two and

- three phase solid heterogeneous mixtures // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1969. – Vol. 12. – P. 249–264.
53. Peterson J.M., Hermans J.J. The dielectric constants of nonconducting suspensions // Journal of Composite Materials. – 1969. – Vol. 3. – P. 338–354.
54. Кац Г.С., Милевски Д.В. Наполнители для полимерных композиционных материалов / пер. с англ. ; под ред. П.Г. Бабаевского. – М. : Химия, 1981. – 736 с.
55. Nielsen L.E. The thermal and electrical conductivity of two-phase systems // Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals. – 1974. – Vol. 13, No. 1. – P. 17–20.
56. Fricke H.A mathematical treatment of the electric conductivity and capacity of disperse systems // Physical Review. – 1924. – Vol. 24. – P. 575–587.
57. Hamilton R.L., Crosser O.K. Thermal conductivity of heterogeneous two-component system // Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals. – 1962. – Vol. 1. – P. 187–191.
58. Effective thermal conductivity of dispersed materials with contrast inclusions / M.I. Епов, V.I. Terekhov, M.I. Nizovtsev et al. // High Temperature. – 2015. – Vol. 53, No. 1. – P. 45–50.

SUMMARY

The manual provides basic information on mathematical modeling of interrelated physicochemical processes. The problems of heat and mass transfer with phase transformations and chemical reactions are considered. Examples of algorithms and software codes developed in MATLAB language are given for numerical solution of physical tasks.

The manual is intended for undergraduates studying course "Heat power engineering and heat engineering" (13.04.01) as well as for postgraduates studying the specialties "Thermophysics and theoretical heat engineering" (01.04.14), "Chemical physics, combustion and explosion, physics of extreme states of matter" (01.04.17), and "Thermal power plants, their power systems and units" (05.14.14).

Издательство "STT" является лидером научного книгоиздания в Сибирском регионе, консультирует по вопросам защиты авторских прав, организации выпуска научной периодики и распространению научных книг и журналов в России и за рубежом. С 2014 года является официальным представителем британского издательства *Red Square Scientific*, специально ориентированного на российских авторов и российское научное содержание. Это облегчает российским ученым публикации за рубежом и делает их работы широко доступными для мирового научного сообщества.

Лучшие книги, выпущенные Издательством "STT", находятся в крупнейших библиотеках мира – National Library of Medicine (USA), The British Library (UK), Library of Congress (USA) и в The US Patent Bureau (USA), что обеспечивает их размещение в мировых базах данных.

Scientific & Technical Translations



PUBLISHING

Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина 15Б-1

Тел.: (3822) 421-455

E-mail: stt@sttonline.com

МИР ЖДЕТ ВАШИ КНИГИ!

Учебное издание

Павел Александрович Стрижак
Дмитрий Олегович Глушков

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА
С ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ
И ХИМИЧЕСКИМ РЕАГИРОВАНИЕМ
В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ**

Учебное пособие
Опубликовано в авторской редакции

Издательство "STT"
Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина, 15^б–1
Тел.: (3822) 421-455
E-mail: stt@sttonline.com



ИЗДАТЕЛЬСТВО

Усл. печ. л. 8,83. Уч.-изд. л. 4,15.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Формат 60х84/16
Тираж 100 экз. Заказ № 588.